

# РОЛЬ В. А. КОТЕЛЬНИКОВА В СТАНОВЛЕНИИ РАДИОФИЗИКИ И РАДИОТЕХНИКИ

*Н. А. Арманд*

## 1. Введение

Писать о роли В. А. Котельникова в развитии радиофизики и радиотехники не так просто. Это связано как с многообразием направлений, к становлению и развитию которых он «приложил руку», так и с научными результатами, часть которых была получена более 70 лет тому назад и с современной точки зрения представляется «очевидной». Сложность связана также с тем, что Владимир Александрович не был «любителем» публиковаться. В частности, его знаменитая теорема не была толком опубликована вовсе, а классическая работа по потенциальной помехоустойчивости была издана лишь в 1956 г., спустя 10 лет после ее выполнения.

## 2. Теорема

В 1932–1933 гг. 25-летний инженер В. А. Котельников задался мыслью о том, можно ли без искажений передавать сигнал в полосе частот меньшей, чем это позволяет передача «на одной боковой полосе». В современном представлении это означает возможность прохождения сигналов без искажения через канал, спектральная пропускная способность которого меньше спектральной ширины сигнала. Нам это представляется абсурдным, но в то время (1933 г.), когда проблемы спектральной фильтрации были не до конца понятны инженерам, подобная постановка вопроса представлялась разумной. В связи с этим следует вспомнить споры того времени о том, что представляет собой амплитудно-модулированный сигнал: синусоидальное колебание с медленно изменяющейся амплитудой или набор спектральных компонент. Результаты исследований В. А. Котельникова были подготовлены в виде доклада «О пропускной способности «эфира» и проволоки в электро-связи» к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. Съезд не состоялся, но подготовленные к нему материалы были изданы [1], что и

явилось официальным подтверждением приоритета В. А. Котельникова в доказательстве знаменитой теоремы отсчетов.

На самом деле работа содержала семь теорем, но все они являлись в той или иной степени развитием основной теоремы, которая гласит, что любая функция  $f(t)$  с ограниченным спектром ширины  $B$  представима в виде ряда

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2B}\right) \operatorname{sinc}(2\pi Bt - n\pi), \quad \operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

По существу теорема утверждает, что любая функция полностью представима совокупностью своих отсчетов, выбираемых в дискретные моменты времени  $t_n = n/2B$ . Если излучить сверхкороткие импульсы с амплитудами, равными отсчетам функции в указанные дискретные моменты, то приемник, имеющий фильтр нижних частот со спектральной шириной  $B$ , сформирует колебания вида  $\operatorname{sinc}(x)$ , и сумма этих колебаний вновь даст неискаженную функцию  $f(t)$ . Указанная процедура передачи сигнала и его приема поясняется на рис. 1. Поскольку фильтр нижних частот приемника должен иметь ширину полосы, не меньшую спектральной ширины сигнала, то попытки уменьшения этой полосы при неискажаемой передаче сигнала подобны попыткам создания *regretium mobile*, о чем и предупреждал автор работы [1] при постановке задачи.

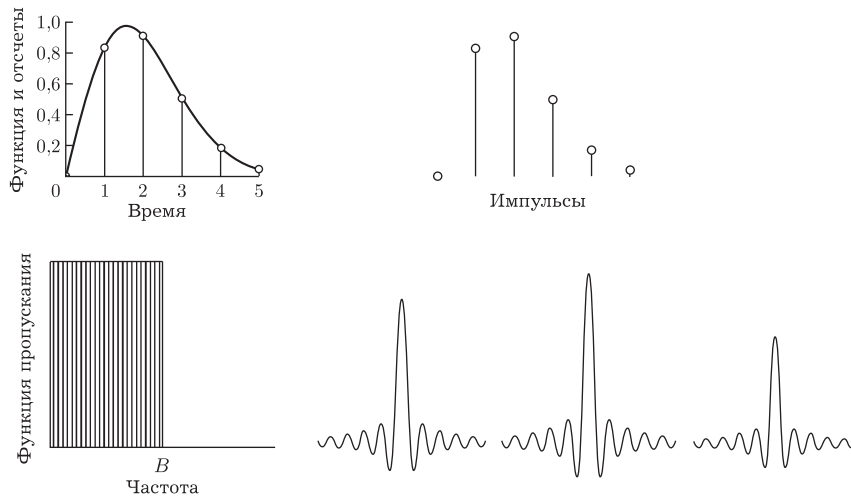


Рис. 1. К теореме отсчетов

Интересно отметить, что Владимир Александрович в 1936 г. пытался опубликовать свою теорему в журнале *Электричество*. Однако в публикации ему было отказано со ссылкой на перегруженность порт-

феля журнала и на узкий интерес его статьи. Знали бы инициаторы отказа, о чем они говорят! На самом деле теорема имеет более широкое значение по сравнению с задачей, приведшей к ее доказательству. По существу, она указала путь представления непрерывных функций в цифровом виде и тем самым стала одним из теоретических фундаментов цифровой техники, бурно развивающейся в последние десятилетия. При постановке вопроса о представлении непрерывной функции в цифровом виде в первую очередь возникает вопрос о том, как часто следует выбирать значения функции, чтобы достаточно точно отразить ее вид. Первый и наивный ответ гласит: чем чаще, тем лучше. Это означает, что для неискаженной передачи любого сообщения необходимо использовать достаточно частые выборки. Но в системах связи мы имеем дело с сигналами с ограниченной шириной спектра. Такие сигналы не могут изменяться во времени как угодно быстро. Поэтому выборки сигнала, взятые за слишком короткий интервал времени, могут оказаться мало отличающимися друг от друга, и использование их полной совокупности оказывается излишним. Функция с ограниченным спектром может существенно изменяться лишь за интервалы времени, не короче, чем обратная величина ширины полосы их спектра. Это понял Найквист, который, по-видимому, одним из первых выразил мысль, что выборки сигнала должны различаться интервалами времени, равными приблизительно обратной полосе его спектральной ширины [2]. Это часто дает основание, особенно западным ученым, употреблять термин «правило выборок Найквиста». Однако рассуждения Найквиста относились к проблеме неискаженной передачи телеграфного (цифрового) сигнала. Эта проблема отличается от проблемы неискаженной передачи аналогового сигнала, хотя между ними есть много общего, на что указывает профессор Люке в своей статье о происхождении теоремы выборок [3], отмечая, что «первым ученым, точно сформулировавшим теорему о выборках и приложившим ее к проблеме теории и техники связи, является, вероятно, В. А. Котельников». Это утверждение дало основание для награждения Владимира Александровича в 1999 г. премией фонда Эдуарда Рейна за фундаментальные исследования.

Похожая теорема была известна математикам. В частности, ее доказал в 1915 г. Уиттекер, исследуя проблему аппроксимации целых функций конечной степени [4]. В. А. Котельников не был знаком с этой работой. Однако в математике — это одна из многих ординарных теорем. В теории же связи и цифровой технике эта теорема является базовой, и ее доказательство несомненно является заслугой В. А. Котельникова. К сожалению, проблемы с публикацией его теоремы долгое время служили препятствием для широкого ознакомления с ней научной общественности. Теорема выборок стала широко известной лишь после того, как в 1948 г. Шеннон доказал ее вновь [5]. Сейчас нередко эта теорема называется как теорема выборок Уиттекера–Котельникова–Шеннона («Whittaker–Kotelnikov–Shannon sampling theorem» [6]).

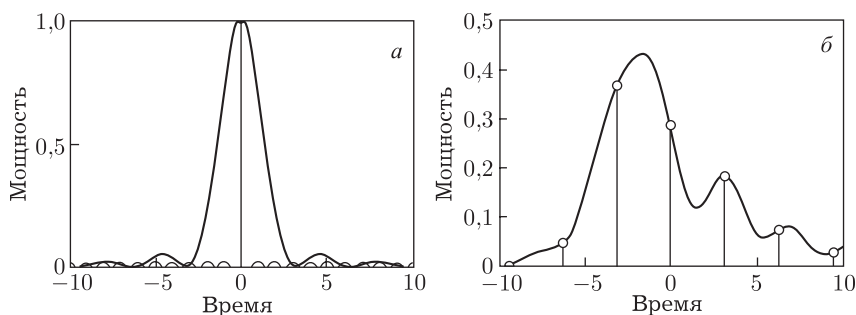


Рис. 2. Теорема отсчетов и дисперсия сигналов

Теорема Котельникова может быть распространена на любые функции, имеющие ограничения в каком-либо пространстве [7]. Имеется сопряженная теорема, относящаяся к функциям, лимитированным по времени [8]. В частности, возможно формирование коротких импульсов за счет генерации колебаний на дискретных частотах. Диаграмма направленности антенны представляет собой преобразование Фурье от токов, пространственное распределение которых ограничено апертурой антенны. На этом основании диаграмма направленности также может быть представлена дискретным рядом [9]. При обработке изображений возникает необходимость их представления в цифровом виде, и здесь теорема Котельникова служит одним из важнейших инструментов для осуществления указанной операции.

Одним из интересных примеров является несколько неожиданное применение теоремы для описания дисперсии сигналов [10]. Этот эффект, как известно, возникает при распространении волн в средах, где фазовая скорость является функцией частоты, и выражается в том, что форма сигналов искажается при их распространении. На рис. 2, *a* представлен неискаженный сигнал, получаемый линейной частотной модуляцией в полосе  $B$ . Он имеет форму  $\text{sinc}(\xi)$  и поэтому отображается одной компонентой Котельникова. В процессе распространения в плазме форма сигнала искажается и приобретает вид, представленный на рис. 2, *б*. Этот искаженный сигнал имеет уже много компонент Котельникова, количество и амплитуды которых отображают степень искажения сигнала. По их параметрам возможно восстановление формы сигнала [10].

### 3. Теория потенциальной помехоустойчивости

В этом разделе мы остановимся на следующей классической работе В. А. Котельникова, посвященной предельной чувствительности приемных систем. В конце 1930-х годов возник кризис в повышении помехоустойчивости систем связи. Всякого рода технические ухищре-

ния наталкивались на некоторый предел, препятствующий дальнейшему повышению чувствительности приемников. Возникал естественный вопрос: является ли это результатом недостаточной изобретательности инженеров или существуют какие-то фундаментальные причины, ставящие предел помехоустойчивости рассматриваемых систем? Ответ на этот вопрос был дан в докторской диссертации В. А. Котельникова «Теория потенциальной помехоустойчивости», написанной в 1946 г. и успешно защищенной в 1947 г. Целью работы было «выявить, можно ли путем усовершенствования приемников при существующих видах сигналов понизить влияние помех? Что может дать в борьбе с помехами изменение формы сигналов? Какие формы сигналов для этого оптимальны?» [11].

В рассматриваемой работе было много принципиально нового и непривычного для инженеров того времени. Прежде всего, это введение ортонормированных функций времени  $C_k(t)$ , по которым может быть разложен сигнал. Сигнал  $A_j(t)$  представлялся в виде суммы

$$A_j(t) = \sum a_{jk} C_k(t).$$

Различные сигналы различаются набором коэффициентов  $a_{jk}$ . В случае ограниченного числа базовых функций  $C_k(t)$  такое разложение назвали бы представлением сигнала в конечномерном евклидовом пространстве (гильбертовом пространстве) [12]. Сигналы могут рассматриваться в качестве векторов в этом пространстве. Пример такого геометрического представления приведен на рис. 3. Надо заметить, что хотя автор диссертации часто обращается к геометрическому представлению сигнала, однако иллюстраций, подобных рис. 3, в его работе нет. При практических расчетах В. А. Котельников пользуется рядами Фурье, что является естественной данью стандартному спектральному представлению сигнала.

Первой задачей, рассмотренной в работе, является задача распознавания. Ее суть в упрощенном виде представлена на рис. 3. На вход приемника поступает смесь сигнала и шума  $X$ . Каков должен быть ответ на выходе приемника — это сигнал  $A_1$  или  $A_2$ ? Ясно, что это будет  $A_1$ , если для евклидовых расстояний справедливо неравенство  $|D_1| < |D_2|$ . Однако соблюдение или несоблюдение этого неравенства носит статистический характер, поскольку из-за случайного поведения шума имеется некоторая вероятность, что рассматриваемое неравенство не соблюдается. Поэтому можно говорить о вероятностной при-

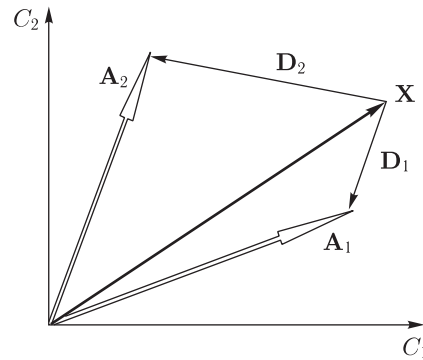


Рис. 3. Геометрическое представление сигналов

роде правильного выделения сигнала на фоне помех. Отсюда следует определение понятия идеального приемника как дающего минимальное число неправильно воспроизводимых сообщений при наложении помехи. Потенциальная помехоустойчивость характеризуется минимально возможными искажениями. Она равна вероятности неправильного воспроизведения и в случае гауссова шума с равномерным спектром определяется отношением удельной энергии к интенсивности помехи  $\sigma^2$ :

$$\alpha = \frac{1}{2\sigma^2} \int_{-T/2}^{T/2} |\mathbf{A}_1(t) - \mathbf{A}_2(t)|^2 dt.$$

Здесь  $T$  — длительность сигнала. Совсем простой вид это отношение принимает в типичном для радиолокации случае, когда  $\mathbf{A}_2(t) = 0$ :

$$\alpha = \frac{Q}{2\sigma^2},$$

где  $Q$  — энергия сигнала. В этом случае «потенциальная помехоустойчивость будет определяться лишь энергией сигнала и совершенно не будет зависеть от его формы» [11]. Современные специалисты по радиолокации сказали бы, что параметр  $\alpha$  является отношением сигнал/шум, которое определяет вероятность ложной тревоги. При большом значении отношения сигнал/шум вероятность правильного выделения сигнала близка к единице, а вероятность ложной тревоги стремится к нулю. Несколько позже (1948 г.) К. Шеннон получил соответствующие результаты для более широкого класса помех. Характерно, что решающую роль для потенциальной помехоустойчивости играет энергия, а не мощность сигнала. Это обстоятельство не всегда всеми понимается. Современные методы формирования сигнала часто рассчитаны на его небольшую мощность, а сам процесс его выделения опирается на сжатие (оптимальную фильтрацию) в приемном устройстве [8]. Окончательный ответ на заданный в начале диссертации вопрос сводится к утверждению, что для повышения помехозащищенности системы связи необходимо увеличивать отношение сигнал/шум, которое оказывается решающим параметром, определяющим вероятность верного выделения сигнала на фоне помех.

В последующих частях работы задача распознавания, о которой мы говорили выше, дополняется задачами оценки параметров и фильтрации. Тем самым охватываются основные проблемы статистической радиотехники. Это и является основой для утверждения о фундаментальном характере диссертации В. А. Котельникова.

Отметим, что ко времени написания работы В. А. Котельникова в теории вероятности и теории случайных процессов математиками был получен ряд важнейших результатов в теории фильтрации, теории оценки параметров, теории статистических решений и т. п. Здесь мы сталкиваемся с ситуацией, аналогичной ситуации с теоремой отсчетов.

Результаты математиков не доходили до своего потребителя, и нужны были усилия других специалистов, чтобы они приобрели практический смысл. В 1998 г. была опубликована статья Верду, посвященная пятидесятилетию теории Шеннона [13]. В ней, в частности, говорилось, что наибольший вклад во внедрение теории случайных процессов в инструментарий инженеров связи внесли Винер [14] и Райе [15]. Однако работа Винера, опубликованная в 1949 г., не могла быть известна В. А. Котельникову в 1946 г. Что касается работы Райса, то она была опубликована в 1944 г., и это единственная работа, на которую В. А. Котельников ссылается в своей диссертации. Других ссылок нет потому, что не было предшественников. В связи с этим Владимир Александрович с полным основанием может считаться одним из основоположников статистической радиофизики и радиотехники. Эта его выдающаяся роль почему-то не очень широко отражается в научной печати. То, что статистическое мышление не было распространено среди радиоинженеров в те годы достаточно широко, показывает и сам способ изложения работы В. А. Котельникова. Несмотря на то, что в ней все время речь идет о случайных процессах, там не встретишь термины: корреляция, спектральная плотность и др., хотя неявно они присутствуют. Сама процедура принятия решений строится на байесовской стратегии, но это не упоминается в тексте, а формула для априорной вероятности просто выводится исходя из «разумных» соображений.

Как уже отмечалось, *Теория потенциальной помехоустойчивости* была опубликована лишь в 1956 г., когда широкое признание получили работы многих других авторов. Поэтому эта работа хорошо известна лишь тем, «кто знает», и в последнее время иногда цитируется в основном российскими учеными. Это, в общем-то, естественно. Наука не стоит на месте.

#### **4. Заключение**

В столь кратком сообщении трудно описать все результаты деятельности человека, подобного В. А. Котельникову по масштабу и глубине мышления. Мы не коснулись, в частности, его фундаментальных работ в области криптографии, его роли в проектировании и создании в довоенное время системы радиосвязи Москва–Хабаровск, его вклада в теорию параметрических усилителей, его роли в создании систем связи с глубоко погруженными подводными лодками и многого другого. Следует указать, что В. А. Котельников не раз являлся инициатором новых направлений исследований, проводимых как в ИРЭ РАН, где он многие годы был директором, так и в других организациях. Особо следует отметить его роль в развитии космических исследований, которую он осуществлял будучи вице-президентом Академии наук СССР и председателем совета «Интеркосмос».

Подводя итог, можно сказать, что Владимир Александрович Котельников являлся выдающимся ученым и инженером XX в. — одним

из основоположников цифровой техники анализа сигналов, теории информации, статистической радиофизики и радиотехники, радиолокационной астрономии. Один только этот краткий перечень ясно указывает, что мы имели дело с крупнейшей в истории страны и науки личностью, внесшей огромный вклад в развитие науки.

### Список литературы

1. *Котельников В. А.* в сб. Всесоюз. энергетический комитет. Материалы к I Всесоюз. съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности (М.: Управление связи РККА, 1933) с. 1–19; переизд.: *О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи* (М.: Институт радиотехники и электроники МЭИ (ТУ), 2003). См. настоящий сборник. с. 90–109.
2. *Nyquist* *HAIEE Trans.* **47** 617(1928).
3. *Lüke D.* *IEEE Commun. Mag.* **37** (4) 106 (1999).
4. *Whittaker E. T.* *Proc. R. Soc, Edinburgh* **35** 181 (1915).
5. *Shannon C. E.* *Bell Sys. Tech. J.* **27** 379, 623 (1948).
6. *Petersen D. P., Middleton D.* *Inform. Control* **5** (4) 279 (1962).
7. *Хургин Я. И., Яковлев В. П.* Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике (М.: Физматгиз, 1962).
8. *Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д.* Выделение сигналов на фоне случайных помех (М.: Советское радио, 1960).
9. *Минкович Б. М., Яковлев В. П.* Теория синтеза антенн (М.: Советское радио, 1969).
10. *Арманд Н. А.* Радиотехника и электроника **49** 1199 (2004).
11. *Котельников В. А.* Теория потенциальной помехоустойчивости (М.: Радио и связь, 1998).
12. *Левитан Б. М.* «Гильбертово пространство», в кн. Математическая энциклопедия. Т. 1 (М.: Советская энциклопедия, 1977) с. 978.
13. *Verdu S.* *IEEE Trans. Inform. Theory* **44** 2057 (1998).
14. *Wiener N.* *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series, with Engineering Applications* (New York: Wiley, 1949).
15. *Rise S.* *Bell Syst. Tech. J.* **23** 282 (1944); **24** 46 (1945).