# ПРОИСХОЖДЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О ВЫБОРКАХ

*Ханс Диетер Люке*

Технологический Университет, г. Аахен, Германия

Пятьдесят лет назад публикации Клода Е. Шеннона вынесли теорему о выборках на широкое внимание инженеров-связистов. Мы покажем, как практики, теоретики и математики открыли почти независимо друг от друга теорему о выборках и поняли ее значение.

В 1948 и в 1949 гг. Клод Е. Шеннон опубликовал две революционные статьи, в которых он заложил основы теорию информации [1, 2]. В статье [1] теорема о выборках сформулирована как «Теорема 13»:

*Пусть функция $f(t)$ не содержит частотных составляющих, превышающих частоту $W$. Тогда*

$$f(t) = \sum X_n \frac{\sin \pi(2Wt - n)}{\pi(2Wt - n)},$$

где

$$X_n = f\left(\frac{n}{2W}\right).$$

Только после момента публикации этих статей теорема, известная как «теорема о выборках Шеннона», стала общей собственностью инженеров связи, хотя сам Шеннон пишет в [2], что:

*Это — факт, который является общепризнанной истиной в искусстве связи.*

Несколькими строчками позже он, однако, добавляет:

... но, несмотря на его очевидную важность, [он], кажется, не появляется явно в литературе по теории связи.

В последующем анализе вышеупомянутое утверждение берется в качестве отправной начальной точки. Нам станет очевидно, что математики, практики и теоретики в теории связи натолкнулись на значение теоремы о выборках почти независимо друг от друга, и что связей между ними не появлялось до более поздних стадий развития этой теоремы.

## Практики

В технике связи первые эксперименты в телефонии с мультиплексированием (уплотнением каналов) с разделением во времени (*TDM*) приводили к вопросам, каким образом и как часто необходимо осуществлять выборки непрерывного во времени сигнала.

Попытка передать больше чем один сигнал одновременно по единственному проводу началась вскоре после первых коммерческих успехов в телеграфии в 40-х годах XIX века. Первые предложения о *TDM* мультиплексировании, использующие синхронно вращающиеся коммутаторы, исходили от Ф.С. Бейквэлла (1848), А.В. Ньютона (1851) и М.Б. Фармера (1853). Технически более совершенные методы были затем развиты М. Мейером (1870), Дж. М.Э. Бадо (к 1874 г.), а также П. Лакуром и П.Б. Делани (1878) [3, 4]. Для нас существенно не только то, что использовались методы, в которых полные телеграфные сигналы от различных передатчиков были размещены в хронологическом порядке (например, у Бадо), но и то, что некоторые предложенные системы были также оборудованы быстро вращающимися коммутаторами, которые были способны передать, по крайней мере, две выборки каждого элементарного сигнала (например, у Делани). Эта техника делает ненужной дополнительную синхронизацию между передатчиком и выборкой. Один из этих быстровращающихся коммутаторов — «дистрибутор» системы телеграфии Ф. Дж. Паттена (около 1891 г.) — использовался для первой демонстрации *TDM* мультиплексирования телефонных сигналов. Изобретателем системы был Уиллард М. Майнер. Он запатентовал свой метод в 1903 г. после многолетних предварительных экспериментов [5]. В [6], показаны принципиальные схемы использовавшегося «Паттеновского дистрибутора». Майнер определил экспериментально требуемую скорость осуществления выборки [6].

Аппарат, изобретенный Майнером, был в то время в своей основе подобен прежде используемому для тех же целей в мультиплексной телеграфии или телефонии, но новый аппарат управляется при намного большей скорости, что позволяет перенести частоту прерывания связи между отдельными объектами или подсистемами до скорости, приближающейся в большей или меньшей степени к скорости колебаний обертонов, характеризующих обычную речь. Скорость прерывания 1000 или 2000 колебаний в секунду не будет отвечать поставленным целям, но по мере увеличения скорости и перехода ее за 3000, улучшенные результаты стали очевидными, и еще более улучшились, когда скорость достигла 3500 или 3600 колебаний в секунду; лучшие результаты получаются при скорости приблизительно 4300 колебаний в секунду.

Майнер, таким образом, предполагал, что скорость осуществления выборки совпадет приблизительно с верхними частотными компонентами речевого сигнала. В действительности, этот телефонный аппарат должен был иметь частоту отсечки, лишь немного большую, чем 2 кГц, что отвечает требованиям теоремы о выборках.

Поскольку теоретическое разъяснение процесса осуществления выборок не было завершено, заявления относительно скорости осуществления выборок в публикациях, так же как и в патентных описаниях для *TDM* мультиплексированных сигналов речи, остались достаточно расплывчатыми и неопределенными вплоть до 1930-х гг. Например, Л. Фон Крамолин в 1923 г. пишет в патенте на *TDM*-систему:

*... поэтому возможно работать со скоростью переключения, которая находится вне пределов слышимости, посредством чего шум переключения в индивидуальных телефонах не прослушивается и возможно осуществить бесшумную связь.*

В 1930-х гг. были разработаны несколько *TDM* систем для телефонии. Однако, как отмечает Каттермоул в [7]:

Ситуация около 1936 г. характеризовалась тем, что осуществление выборок и TDM телефония развивались эмпирически и теория была рудиментарная...

Некоторые авторы, такие как М. Марро в 1938 г., кажется, дают рекомендации по выбору слишком низких скоростей осуществления выборок для передачи речи. Марро использует широкие импульсы осуществления выборок для дуплексной TDM системы связи. Здесь должен быть принят во внимание эффект того, что, если импульс осуществления выборок расширен, можно уменьшить скорость осуществления выборок и достигнуть тем самым той же самой разборчивости слова. Эта зависимость была количественно исследована Дж. А. Миллером и Дж. С. Р. Ликлайдером; их результаты показаны в [8]. Согласно этим результатам, разборчивость слова с понижением скорости выборок только монотонно уменьшается для очень коротких импульсов выборок (вплоть до относительной ширины, равной приблизительно 6% от периода выборок). Для импульсов выборок с большей относительной шириной, наоборот, разборчивость снова увеличивается в диапазоне скоростей выборок от 10 до 100 гц.

## Теоретики

Инженеры связи, занимающиеся теорией, не начинали работать над проблемой осуществления выборок удивительно долго. Х. Найквист и К. Купфюллер в 1924 г. доказали, что число телеграфных сигналов, которые могут быть переданы по линии связи, пропорционально произведению времени передачи на ширину полосы частот. Р. В. Л. Хартли в 1928 г. обобщил этот результат на случай многоуровневой передачи. В этом же году Найквист получил свою известную теорему по неискажающей передаче телеграфных (цифровых) сигналов. Но неискажающая передача при определенной по Найквисту скорости и безошибочная интерполяция импульсов выборок аналогового сигнала — различные проблемы, даже при том, что в них есть некоторые математические подобия. Поэтому эти работы не могут быть расценены как предварительные источники для теоремы о выборках, особенно в течение 1920-х и 1930-х годов.

Первым ученым, точно сформулировавшим теорему о выборках и приложившим ее к проблемам теории и техники связи, является, вероятно, В. А. Котельников. В его работе «О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи», опубликованной в 1933 году, он доказывает теоремы о выборках для низкочастотных сигналов, а также для полосовых сигналов [9]. Он использует эти теоремы в ходе научных работ, чтобы показать, что полоса частот аналогового сигнала не может быть уменьшена методами модуляции. Для низкочастотных сигналов теорема о выборках сформулирована в [9] следующим образом:

**Теорема 1**

*Любая функция $F(t)$, которая состоит из частотных составляющих от 0 до $f_l$ периодов в секунду, может быть представлена следующим рядом:*

$$F(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty} D_k \frac{\sin\omega_l\left(t-\dfrac{k}{2f_l}\right)}{t-\dfrac{k}{2f_l}}, \tag{1}$$

*где $k$ — целое число, $\omega_l = 2\pi f_l$, $D_k$ — константа, которая зависит от $F(t)$.*

*Наоборот, любая функция $F(t)$, которая представлена рядом из уравнения (1), состоит только из частотных составляющих с частотами от 0 до $f_l$ периодов в секунду.*

**Теорема 2**

*Любая функция $F(t)$, которая состоит из частотных составляющих с частотами от 0 д $f_l$, может быть передана непрерывно с любым желаемым уровнем точности, используя только составляющие с номерами до $1/2f_l)s$. Из измерения значений $F(t)$ для $t = n/(2f_l)$ ($n$ — целое число), мы действительно получаем*

$$F\left(\frac{n}{2f_l}\right) = D_n\omega_l, \tag{2}$$

*потому что все члены ряда в уравнении (1) для этого значения $t$ стремятся к нулю, за исключением члена с $k = n$, равного $D_n\omega_l$, который может легко быть определен после вычисления в неопределенной точке. Таким образом, мы можем определить следующий коэффициент $D_k$, соответствующий процессу после каждого значения $(1/2f_l)s$. Если мы передаем эти значения $D_k$ один за другим, после каждого $(1/2f_l)s$, мы можем восстановить функцию $F(t)$, соответствующую уравнению (1) с любой степенью точности.*

Поскольку эта замечательная работа в то время не была опубликована в интернационально доступной форме, публикации по теоретически точной формулировке теоремы о выборках в литературе по технике связи возникли независимо друг от друга. Так, Х. Раабе вывел теорему о выборках в его диссертации, изданной в 1939 г. [10]. Эта публикация особенно соответствует практическому применению теоремы о выборках, поскольку именно здесь влияние импульсов выборки конечной продолжительности принято во внимание в форме «естественного осуществления выборок». Раабе так суммирует свои результаты:

«Для демонстрируемых условий передачи частота осуществления выборок определяется диапазоном частот сигнала. Если они сохраняются ниже половины частоты осуществления выборок, все шумовые частоты остаются над этим пределом и могут легко удалиться из приемника фильтром нижних частот. Передача сигнала может, таким образом, быть полностью неискаженной, если частота осуществления выборок вдвое больше самой высокой частоты сигнала. Верхнее ограничение частот сигнала является поэтому жизненным условием неискаженной передачи при мультиплексной передаче с разделением времени.»

Эта работа также содержит специальную теорему о выборках для сигналов с фиксированной полосой пропускания. Работа Раабе цитируется в соответствующей публикации У. К. Беннетта 1941 г. [11], а работа Беннетта, в свою очередь, цитируется Шэнноном в [2] как один из источников теоремы о выборках.

Наконец, должно быть упомянуто, что теорема о выборках также описана в 1949 г. в японской книге *Hakei Denso* (*Передача сигнала*) японским ученым И. Сомейа. Следовательно, термин «Теорема Сомейа» также может быть найден в некоторой японской литературе для обозначения теоремы о выборках.

## Математики

Для математиков теорема о выборках — специальная теорема из области теории аппроксимации. Теория аппроксимации определяет, например, какие функции могут быть представлены линейной суммой данных базовых функций типа алгебраических или тригонометрических полиномов и с какой ошибкой аппроксимации. Один возможный подход состоит в том, чтобы определить эти линейные суммы так, чтобы они в определенных точках принимали бы те же самые значения, что и функция, которая должна быть аппроксимирована.

В этом смысле теорема о выборках дает возможность установить, как эта задача интерполяции может быть решена, особенно для функций, ограниченных в частотной области, со стремящейся к нулю ошибкой аппроксимации.

Первый подход в этом направлении был описан еще в 1765 г. Ж. Л. Лагранжем. Лагранж определяет линейную сумму гармонических синусоидальных функций таким способом, что это совпадает с функцией, которая должна быть аппроксимирована, в $n$ эквидистантных точках. Обобщая этот подход, можно сказать, что знание $2n + 1$ эквидистантных значений функции на периоде достаточно, чтобы представить периодическую функцию, которая может быть описана тригонометрическим рядом с $n$ синусными и косинусными членами, а также с одной константой. Эта известная теорема может рассматриваться как теорема о выборках для периодической функции с ограниченной частотной полосой.

Первое предложение об интерполяции эквидистантных значений функции, использующей функции вида $\sin x/x$, было опубликовано в 1908 г. С.-Дж. Ла Валле Пуассаном в *Bulletin Academic Royale de Belgique*. Однако особая важность этой интерполяции для функций с ограниченной полосой еще не исследуется и не отмечается в этой работе.

Статья Э. Т. Уиттекера «On the functions which are represented by the expansions of the interpolation theory» («О функциях, которые представляются рядами в теории интерполяции») 1915 г. должна поэтому быть расценена как самая первая работа, относящаяся к теореме о выборках для всех ограниченных по полосе функций [12]. Уиттекер рассматривает проблему достижения самой гладкой возможной интерполяции с сингулярностями, но без «быстрых колебаний» для данных табличных значений функции $f(x)$. Чтобы выполнить последнее условие, он показывает, что при некотором условии возможно интерполировать данные значения выборок в интервалах $w$ так, что Фурье-преобразование этой интерполяционной функции не содержит никаких членов с периодами, меньшими чем $2w$. Эта интерполяция, названная Уиттекером «кардинальная функция» $C(x)$, имеет форму

$$C(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(a + rw) \sin \frac{\pi}{w}(x - a - rw)}{\frac{\pi}{w}(x - a - rw)}$$

($a$ — произвольный фактор сдвига).

Мы определили это первоначально как ту уникальную функцию котабличного набора, который не имеет никаких особенностей в конечной части плоскости и никаких компонентов, чей период меньше, чем увеличенный вдвое табличный интервал $w$.

Здесь термин «котабличный набор» относится к набору всех возможных функций с теми же самыми табличными значениями или значениями выборок, посредством чего «табличные интервалы» соответствуют тогда интервалам выборок.

Кроме того, Уиттекер демонстрирует, что кардинальная функция является *единственной* интерполяционной функцией с этими характеристиками. Это также неявно постулирует, что каждая функция, чье преобразование Фурье ограничено частотами меньше $1/2w$, может быть описана выборками значений в интервалах $w$ и может быть уникально интерполирована снова в форме кардинальной функции.

Е. Л. Феррар указал в 1925 г., что осуществление выборок и интерполяция кардинальной функции непосредственно снова ведут к той же самой функции, независимо от того, как значения выборок сдвинуты во времени. Он рассматривает это важное свойство инвариантности теоремы о выборках как некую «согласованность». Последующие публикации по кардинальной функции цитируются Дж. М. Уиттекером (не путать с Е. М. Уиттекером) [13]. Шэннон обращается к этой книге в [2].

В заключение следует упомянуть, что обширное обзорное описание развития теоремы о выборках после Шэннона было опубликовано А. Дж. Джерри в 1977 г. [14].

## Заключение

Теорема о выборках для низкочастотных функций играет важную роль в технике связи как соединительное звено между непрерывными во времени и дискретными во времени сигналами. Многочисленные различные имена, которым теорема о выборках приписана в литературе — Шэннон, Найквист, Котельников, Виттакер, Сомейа — вызвали вышеупомянутое обсуждение происхождения этой теоремы. Однако эта история показывает также процесс, который является часто очевидным в теоретических проблемах, в технологии или в физике: сначала практики выдвигают правило, затем теоретики развивают общее решение, и, наконец, кто-то обнаруживает, что математики давно решили математическую проблему, которая содержит в себе всю исходную проблему, но в «роскошной изоляции».

## Литература

1. Shannon C. E. A mathematician theory of communication // Bell Sys. Tech. J. 1948. Vol. 27. P. 379–423, 623–656.
2. Shannon C. E. Communication in the presence of noise // Proc. IRE. 1949. Vol. 37. P. 10–21.
3. Zetxsche K. E. Geschichte der elektrischen Telegraphie. Berlin: Springer Verlag, 1877.
4. Granfeld A. E. Die Mehrfach-Telegraphie auf einem Drahte. Vienna: A.Hartieben's Verlag, 1885.
5. Miner W. M. Multiplex Telephony. U.S. Pat. 745 734. Filed Feb.26, 1903.
6. Miner W. M. Recent developments in multiplex-telephony // Elec. World and Eng. 1903. Vol. 42. P. 920.
7. Cattermole K. W. Principles of Pulse Code Modulation. London: Hiffe Books, 1969.
8. Miller G. A. and Licklider J. C. R. The intelligibility of interrupted speech // JASA. 1950. Vol. 22. P. 167–173.
9. Котельников В. А. О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи («On the transmission capacity of 'ether' and wire in electrocommunication») // Первая Всесоюзная Конференция по вопросам связи, 14 января, 1933.
10. Raabe H. Untersuchungen an der wechselzeitigen Mehrfachubertragung (Multiplexubertragung). 1939. Vol. 16. P. 213–228.

11. Bennett W. R. Time division multiplex systems // Bell Sys. Tech. J. 1941. Vol. 20. P. 199–221.

12. Whittaker E T. On the functions which are represented by the expansions of the interpolation-theory // Proc.Roy.Soc., Edinburgh. 1915. Vol. 35. P. 181–194.

13. Whittaker J. M. Interpolatory Function Theory. Cambridge Univ. Press. 1935.

14. Jerri A. J. The Shannon sampling theorem — its verious extensions and applications: a tutorial review // Proc. IEEE. 1977. Vol. 65. P. 1565–1596.