

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

§ 4.1. Вводные замечания

Последовательным колебательным контуром называют цепь, состоящую из последовательно соединенных катушки индуктивности L , конденсатора C и активного сопротивления r (рис. 4.1).

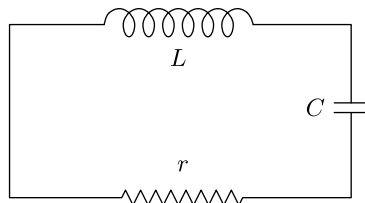


Рис. 4.1. Схема последовательного колебательного контура

В активное сопротивление r мы будем включать активную составляющую сопротивления катушки индуктивности r_L , активную составляющую сопротивления конденсатора r_C и дополнительно включенное в цепь контура активное сопротивление r_r (если таковое имеется). Таким образом,

$$r = r_L + r_C + r_r. \quad (4.1)$$

Величины r_L и r_C берутся из последовательных схем замещения катушки индуктивности и конденсатора.

Последовательные колебательные контуры используются в радиотехнике очень широко, как для выделения колебаний нужных частот, так и для увеличения напряжения колебаний. Колебательными эти контуры называются потому, что в них могут существовать электрические колебания в отсутствие внешних эдс.

Мы рассмотрим сначала воздействие на последовательный колебательный контур непрерывных синусоидальных колебаний, затем в гл. 6 и 7 — модулированных колебаний и, наконец, в гл. 8 — прерывистых синусоидальных колебаний и отдельных импульсов.

§ 4.2. Сопротивление последовательного колебательного контура

Пусть на последовательный колебательный контур, изображенный на рис. 4.2 и состоящий из последовательно соединенных катушки индуктивности L , конденсатора C и активного сопротивления r , действует эдс

$$e = E_m \cos(\omega t + \varphi).$$

Полное сопротивление контура (рис. 4.3) будет равно

$$\mathbf{Z} = r + ix = Ze^{i\beta}, \quad (4.2)$$

где

$$x = \omega L - \frac{1}{\omega C}, \quad (4.3)$$

$$Z = \sqrt{r^2 + x^2},$$

$$\beta = \arctg \frac{x}{r}. \quad (4.4)$$

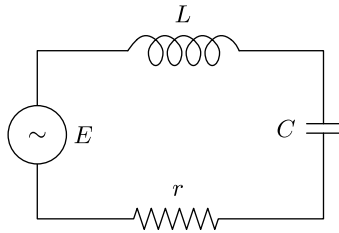


Рис. 4.2. Включение эдс в последовательный колебательный контур

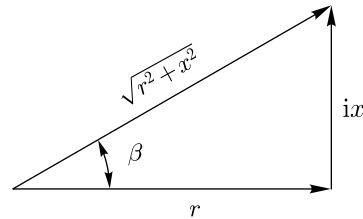


Рис. 4.3. Векторная диаграмма сопротивлений последовательного колебательного контура

Полная проводимость контура в комплексной форме равна

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = Ye^{-i\beta},$$

где

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}}. \quad (4.5)$$

Ток, протекающий в контуре, может быть записан в комплексной форме следующим образом:

$$\mathbf{I} = \mathbf{EY} = \mathbf{EY}e^{-i\beta} = EYe^{i(\varphi - \beta)},$$

где $E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$ — эффективное значение эдс, $\mathbf{E} = Ee^{i\beta}$ — эффективное значение эдс в комплексной форме.

Мгновенное значение тока равно

$$i = \sqrt{2} EY \cos(\omega t + \varphi - \beta) = E_m Y \cos(\omega t + \varphi - \beta).$$

Как видно из этих формул, сдвиг фаз между током и эдс равен величине β , определяемой ф-лой (4.4), а эффективное значение тока равно $I = EY$.

Проследим зависимость β и Y , определяющих сдвиг фаз и величину тока, от параметров контура и частоты эдс.

С изменением индуктивности L и емкости C контура; а также частоты эдс и ω в ф-лах (4.4) и (4.5) для β и Y меняется только величина x . Строго говоря, с изменением частоты эдс будет меняться

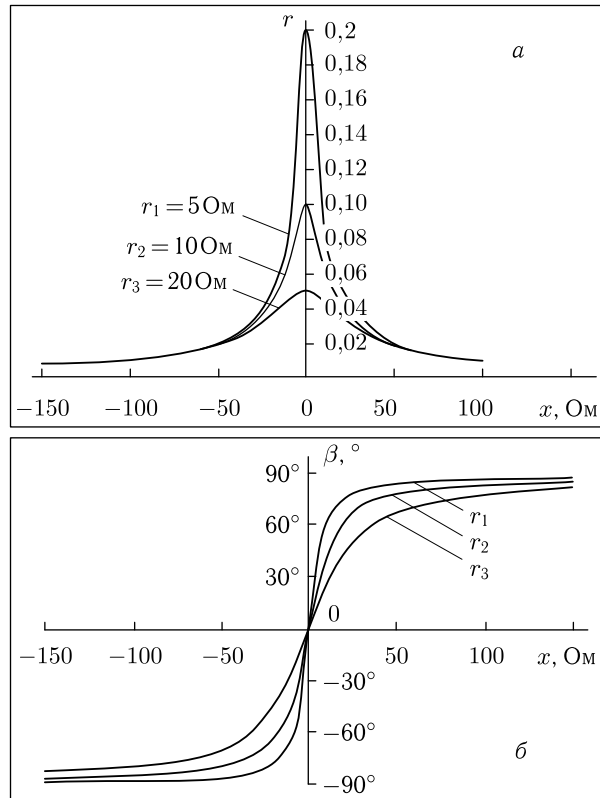


Рис. 4.4. Зависимость модуля Y и аргумента β полной проводимости последовательного колебательного контура от реактивного сопротивления контура x при различных значениях активного сопротивления r

и активное сопротивление контура r , однако это изменение обычно бывает сравнительно малым и сейчас мы не будем принимать его во внимание.

Зависимости β и Y от x даны на рис. 4.4 для различных значений величины r . Как видно из этого рисунка и ф-л (4.4) и (4.5), при $x = 0$ проводимость Y имеет максимальное значение, а сдвиг фаз β равен нулю. Когда x стремится к $+\infty$, проводимость Y стремится к нулю, а сдвиг фаз β к $\frac{\pi}{2}$. Когда x стремится к $-\infty$, проводимость Y стремится к нулю, а сдвиг фаз β к $-\frac{\pi}{2}$.

Исходя из рис. 4.4 и ф-л (4.4) и (4.5), следует еще отметить, что при малых значениях x (когда $x < r$) величины Y и β сильно зависят от r . При больших значениях x (когда $x \gg r$) эта зависимость выражена слабо и в ряде случаев величиной r вообще можно пренебречь. Кривые a рис. 4.4 называются резонансными кривыми, а кривые b — фазовыми характеристиками контура.

Если амплитуда эдс остается постоянной, то ток I , протекающий в контуре, будет зависеть от реактивного сопротивления x так же, как и проводимость Y .

§ 4.3. Обобщенная расстройка. Относительная расстройка

Если реактивное сопротивление колебательного контура x равно нулю, то говорят, что контур настроен в резонанс с частотой эдс или что в контуре наступил резонанс.

Чем больше x отличается от нуля, тем больше расстроен контур. В качестве меры расстройки можно взять безразмерную величину ξ , равную отношению реактивного сопротивления контура к его активному сопротивлению, т. е. величину

$$\xi = \frac{x}{r}. \quad (4.6)$$

Эта величина называется обобщенной расстройкой. Она равна нулю при резонансе.

Зависимость проводимости контура Y от обобщенной расстройки ξ будет в соответствии с (4.5) выражаться формулой

$$Y = \frac{1}{r + ix} = \frac{1}{r(1 + i\xi)} = \frac{e^{-i\beta}}{r\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad (4.7)$$

где

$$\beta = \text{arctg } \xi. \quad (4.8)$$

Зависимость сдвига фаз β между эдс и током от обобщенной расстройки ξ приведена на рис. 4.5.

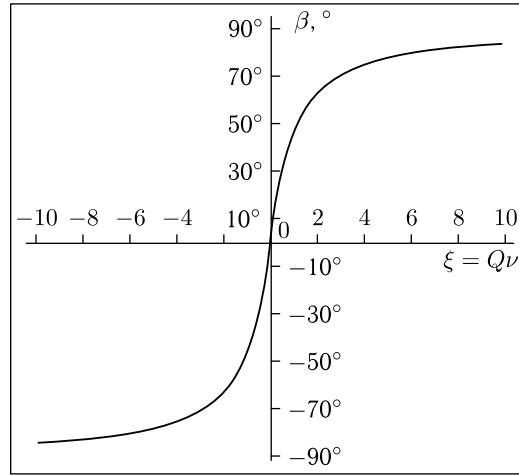


Рис. 4.5. Фазовая характеристика последовательного колебательного контура

Из (4.7) следует, что

$$Y = \frac{1}{r\sqrt{1+\xi^2}}. \quad (4.9)$$

При резонансе $\xi = 0$, $\beta = 0$ и проводимость имеет максимальное резонансное значение

$$Y_p = Y_p = \frac{1}{r}.$$

Введя эту величину в ф-лы (4.7) и (4.9), получим

$$Y = \frac{Y_p}{1+i\xi} = \frac{Y_p e^{-i\beta}}{\sqrt{1+\xi^2}} \quad (4.10)$$

и

$$\frac{Y}{Y_p} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}. \quad (4.11)$$

Зависимость отношения Y/Y_p от обобщенной расстройки приведена на рис. 4.6.

Фазовая характеристика и резонансная кривая, приведенные на рис. 4.5 и 4.6, выгодно отличаются от кривых рис. 4.4 тем, что они универсальны, т. е. годятся для любого последовательного колебательного контура.

Если величина эдс E не меняется, то

$$\frac{I}{I_p} = \frac{Y}{Y_p},$$

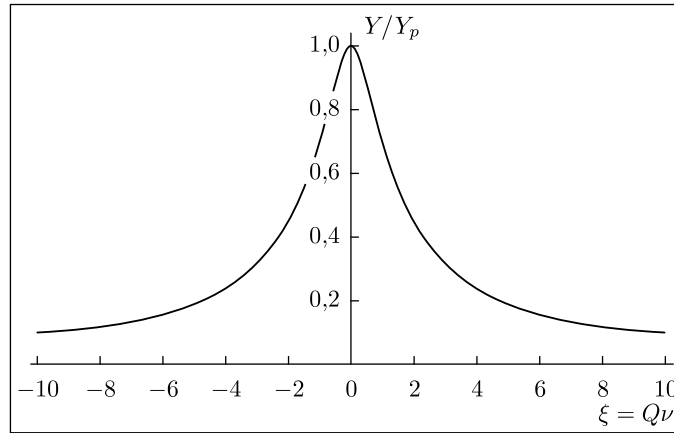


Рис. 4.6. Резонансная кривая последовательного колебательного контура

где $I_p = EY_p = \frac{E}{r}$ — резонансное значение тока в контуре. Поэтому рис. 4.6 является также резонансной кривой тока контура при постоянной величине эдс.

Исследуем более подробно величину x .

Как было указано ранее [см. ф-лу (4.3)], реактивное сопротивление последовательного контура равно $x = \omega L - \frac{1}{\omega C}$.

Из этого выражения видно, что при некотором значении угловой частоты ω реактивное сопротивление обращается в нуль, т.е. наступает резонанс. Эта частота называется угловой резонансной частотой контура и обозначается через ω_p .

Для нее справедливо следующее равенство

$$\omega_p - \frac{1}{\omega_p C} = 0, \quad (4.12)$$

откуда

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Резонансная частота в герцах (в периодах в секунду) равна

$$f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Как следует из ур-ния (4.12), на резонансной частоте сопротивления емкости и индуктивности равны по абсолютной величине между собой. Значение этих сопротивлений при резонансе обозначают через ρ . Таким образом,

$$\rho = \omega_p L = \frac{1}{\omega_p C} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (4.13)$$

Величина ρ называется характеристическим сопротивлением контура.

Произведем дальнейшие преобразования выражения (4.3)

$$x = \omega L - \frac{1}{\omega C} = \rho \left(\frac{\omega L}{\omega_p L} - \frac{\omega_p C}{\omega C} \right) = \rho \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} \right). \quad (4.14)$$

Обозначим

$$\nu = \frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} = \frac{f}{f_p} - \frac{f_p}{f}. \quad (4.15)$$

Величина ν называется расстройкой частоты эдс, действующей на контур, относительно резонансной частоты контура, или просто относительной расстройкой. Относительная расстройка иногда бывает более удобна, чем обобщенная, так как определяется лишь соотношением между частотами.

Зависимость относительной расстройки ν от отношения $\frac{\omega}{\omega_p}$ приведена на рис. 4.7. На рис. 4.8 приведена зависимость ν от $\frac{\omega}{\omega_p}$ для области частот, близких к резонансной частоте контура. Из этих рисунков и ф-лы (4.5) видно, что на частотах, меньших резонансной частоты контура, относительная расстройка отрицательна и стремится к $-\infty$, если ω стремится к нулю. На частотах бóльших, чем резонансная частота контура, относительная расстройка положительна и стремится к $+\infty$, если ω стремится к $+\infty$. Если частота эдс равна резонансной частоте контура, то относительная расстройка равна нулю.

Из ф-л (4.14) и (4.15) следует, что реактивное сопротивление контура равно

$$x = \rho \nu. \quad (4.16)$$

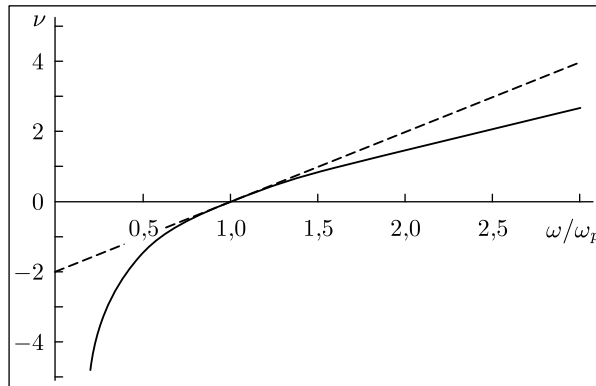


Рис. 4.7. Зависимость относительной расстройки ν от $\frac{\omega}{\omega_p}$. Пунктиром показано

приближенное значение ν , даваемое формулой $\nu = \frac{2(\omega - \omega_p)}{\omega_p}$

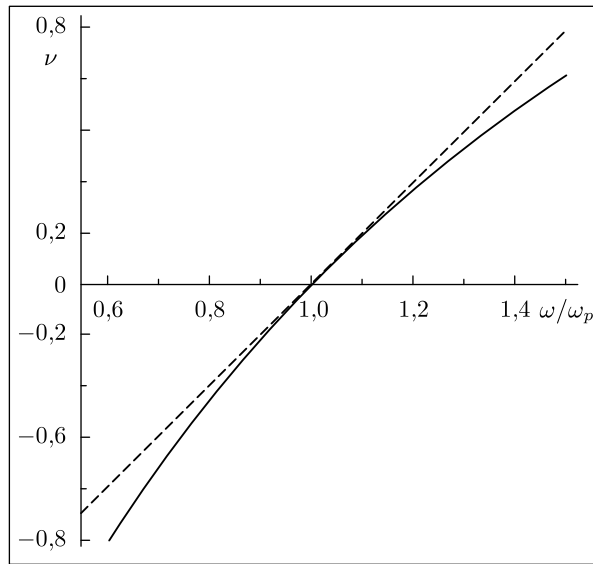


Рис. 4.8. Зависимость относительной расстройки ν от $\frac{\omega}{\omega_p}$ вблизи резонанса. Пунктиром показано приближенное значение ν , даваемое формулой
$$\nu = \frac{2(\omega - \omega_p)}{\omega_p}$$

На рис. 4.9 приведена зависимость реактивного сопротивления последовательного контура от частоты.

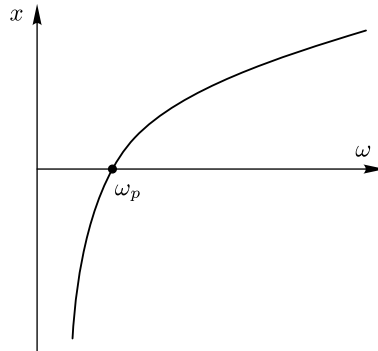


Рис. 4.9. Зависимость реактивного сопротивления последовательного колебательного контура x от частоты ω

Найдем соотношение между обобщенной расстройкой ξ и относительной расстройкой ν .

На основании ф-л (4.6) и (4.16) можно записать

$$\xi = \frac{x}{r} = \frac{\rho}{r} \nu = Q\nu = \frac{\nu}{d}, \quad (4.17)$$

где

$$Q = \frac{1}{d} = \frac{\rho}{r}. \quad (4.18)$$

Величина Q , равная отношению характеристического сопротивления контура к его активному сопротивлению, называется добротностью контура. Обратная величина d — затуханием контура.

Применяемые в радиотехнической практике контуры имеют обычно следующие значения Q :

контуры среднего качества	$50 < Q < 200$,
контуры хорошего качества	$200 < Q < 500$,
контуры отличного качества	$Q > 500$.

Зависимость сдвига фаз β проводимости Y и тока I от относительной расстройки ν можно проследить на рис. 4.5 и 4.6 и с помощью ф-л (4.8) и (4.11), поскольку ξ меняется пропорционально ν .

Чем больше добротность контура Q , тем более резко будут меняться β и Y с изменением относительной расстройки ν . Так, например, в соответствии с рис. 4.5 и 4.6 при $\xi = 1$ отношение $\frac{Y}{Y_p} \approx 0,71$ и сдвиг фаз $\beta = 45^\circ$.

Если добротность контура $Q = 10$, то приведенные соотношения будут иметь место при $\nu = 0,1$, если $Q = 100$, то при $\nu = 0,01$ и т. д. Таким образом, величина Q определяет резонансные свойства контура.

При вычислениях не всегда удобно пользоваться ф-лой (4.15) определения относительной расстройки ν . Если частота эдс, действующей на контур, близка к резонансной частоте контура, то вычисление по ф-ле (4.16) может дать большую ошибку, ибо в этом случае приходится брать разность двух близких к единице величин, каждая из которых вычисляется обычно приближенно.

В таких случаях более удобно пользоваться приближенной формулой. Формулу (4.15) можно переписать так

$$\nu = \frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega_p \omega} = \left(\frac{\omega + \omega_p}{\omega} \right) \left(\frac{\omega - \omega_p}{\omega_p} \right).$$

На частотах, близких к резонансу, первый множитель приблизительно равен 2, поэтому на этих частотах

$$\nu \approx 2 \frac{\omega - \omega_p}{\omega_p} = 2 \frac{f - f_p}{f_p}. \quad (4.19)$$

Зависимость относительной расстройки ν от частоты, выраженная ф-лой (4.19), изображена на рис. 4.7 и 4.8 пунктирной линией.

Из рис. 4.8 и ф-л (4.15) и (4.19) легко убедиться, что если относительная расстройка $\nu = 0,4$, то ошибка, получающаяся при пользовании приближенной ф-лой (4.19), меньше 10 %, если $\nu = 0,2$, то ошибка меньше 5 %, если $\nu = 0,1$, то ошибка меньше 2,5 % и т. д.

Пример 4.1. Дан последовательный контур с параметрами:

$$L = 100 \text{ мкГн}, \quad C = 100 \text{ пФ}, \quad r = 10 \text{ Ом}.$$

Требуется найти резонансную частоту, характеристическое сопротивление и добротность контура, а также ток, протекающий в контуре под действием эдс $e = 100 \cos(10,1 \cdot 10^6 t)$.

Решение. Резонансная угловая частота этого контура равна

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^{-12}}} = 10^7 \text{ 1/с}.$$

Резонансная частота

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{10^7}{2\pi} = 1,6 \cdot 10^6 \text{ Гц} = 1,6 \text{ МГц}.$$

Характеристическое сопротивление равно

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 10^{-6}}{100 \cdot 10^{-12}}} = 1000 \text{ Ом}.$$

Добротность

$$Q = \frac{\rho}{r} = \frac{1000}{10} = 100.$$

Относительная расстройка по приближенной формуле

$$\nu = \frac{2(\omega - \omega_p)}{\omega_p} = \frac{2 \cdot 10^5}{10^7} = 0,02.$$

Обобщенная расстройка

$$\xi = Q\nu = 2.$$

По кривым рис. 4.5 и 4.6 мы получим, что для $\xi = 2$

$$\frac{Y}{Y_p} = 0,447, \quad \beta = 63,4^\circ = 1,11 \text{ рад}.$$

Так как

$$Y_p = \frac{1}{r} = 0,1 \text{ мо},$$

то

$$Y = 0,447 Y_p = 0,0447 \text{ мо}.$$

Поэтому ток через контур будет равен

$$\begin{aligned} i &= E_m Y \cos(\omega t + \varphi - \beta) = \\ &= 100 \cdot 0,0447 \cos(10,1 \cdot 10^6 t - 1,11) = 4,47 \cos(10,1 \cdot 10^6 t - 1,11) \text{ А}. \end{aligned}$$

§ 4.4. Полоса пропускания контура

Как было показано в предыдущих параграфах, последовательный колебательный контур в некоторой более или менее узкой области частот вблизи резонанса обладает большой проводимостью по сравнению с проводимостью на частотах, удаленных от резонанса. Это свойство колебательного контура широко используется в радиотехнике для вы-

деления колебаний от той станции, которую хотят принять. Условно говорят, что контур пропускает колебания на частотах, близких к резонансу, и не пропускает на частотах, удаленных от него.

Полосой пропускания контура условились называть ту область частот, в которой проводимость контура не меньше, чем $\frac{Y_p}{\sqrt{2}}$, где Y_p — максимальная (резонансная) проводимость контура.

Для этой области частот должно быть справедливо неравенство

$$\frac{Y}{Y_p} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

На рис. 4.10 отмечены граничные частоты полосы пропускания: ω_2 — верхняя граничная частота полосы пропускания, ω_1 — нижняя граничная частота полосы пропускания.

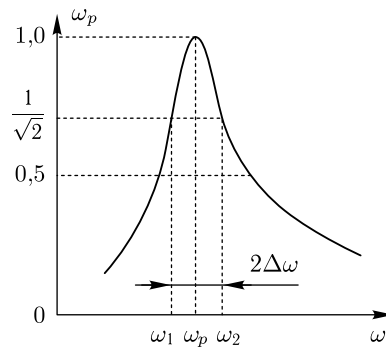


Рис. 4.10. Резонансная кривая последовательного колебательного контура: ω_p — резонансная частота, ω_2 и ω_1 — граничные частоты полосы пропускания, $2\Delta\omega$ — ширина полосы пропускания

Ширина полосы пропускания, следовательно, равна

$$\omega_2 - \omega_1 = 2\Delta\omega.$$

На границах полосы пропускания справедливо равенство

$$\frac{Y}{Y_p} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (4.20)$$

Сравнив выражение (4.20) с ф-лой (4.11), можно сделать вывод, что на верхней граничной частоте полосы пропускания обобщенная расстройка $\xi_2 = +1$, а на нижней граничной частоте $\xi_1 = -1$, откуда вытекает, что на граничных частотах относительная расстройка равна

$$\nu_{1,2} = \pm \frac{1}{Q} = \pm d. \quad (4.21)$$

Воспользуемся приближенной ф-лой (4.19) для определения ширины полосы пропускания контура. Значение относительной расстрой-

ки для верхней граничной частоты полосы пропускания определится из уравнения

$$\nu_2 = 2 \frac{\omega_2 - \omega_p}{\omega_p} = 2 \frac{f_2 - f_p}{f_p} = \frac{1}{Q} = d. \quad (4.22)$$

Относительная расстройка на нижней границе полосы пропускания определится уравнением

$$\nu_1 = 2 \frac{\omega_1 - \omega_p}{\omega_p} = 2 \frac{f_1 - f_p}{f_p} = -\frac{1}{Q} = -d. \quad (4.23)$$

Вычитая уравнение (4.23) из уравнения (4.22) и производя необходимые преобразования, получаем

$$\omega_2 - \omega_1 = 2\Delta\omega = \frac{\omega_p}{Q} = \omega_p d$$

или

$$f_2 - f_1 = 2\Delta f = \frac{f_p}{Q} = f_p d.$$

(4.24)

Таким образом, полоса пропускания последовательного колебательного контура тем больше, чем больше его резонансная частота и чем меньше добротность.

Пример 4.2. Требуется найти ширину полосы пропускания контура примера 4.1.

Решение. В соответствии с формулами (4.24) получим ширину полосы

$$f_2 - f_1 = \frac{f_p}{Q} = \frac{1,6 \cdot 10^6}{100} = 16\,000 \text{ Гц.}$$

§ 4.5. Добротность контура

Как уже упоминалось в предыдущих параграфах, величина добротности контура характеризует его резонансные свойства.

Чем больше добротность контура, тем более резко изменяются проводимость и ток, протекающий в контуре, с изменением частоты и тем уже полоса пропускания контура.

Добротность и затухание контура зависят от активного сопротивления r . В § 4.1 указывалось, что под сопротивлением r подразумевается сумма активных составляющих сопротивления катушки индуктивности и сопротивления конденсатора в последовательных схемах замещения. Сопротивление r_r [см. формулу (4.1)] мы считаем отсутствующим.

Если известно затухание катушки и тангенс угла потерь конденсатора, то затухание контура равно

$$d = d_L + \operatorname{tg} \delta, \quad (4.25)$$

где $d_L = \frac{r_L}{\omega_p L}$ — затухание катушки, а $\operatorname{tg} \delta$ — тангенс угла потерь

конденсатора.

Действительно,

$$d = \frac{r}{\rho} = \frac{r_L + r_C}{\rho} = \frac{r_L + \frac{\operatorname{tg} \delta}{\omega_p C}}{\rho} = \frac{r_L}{\rho} + \frac{\operatorname{tg} \delta \omega_p C}{\omega_p C} = d_L + \operatorname{tg} \delta.$$

Здесь $r_C \approx \frac{\operatorname{tg} \delta}{\omega_p C}$ — активная составляющая сопротивления конденсатора в последовательной схеме замещения.

Если известна добротность катушки $Q_L = \frac{1}{d_L}$ и добротность конденсатора $Q_C = \frac{1}{\operatorname{tg} \delta}$, то добротность контура Q определится из равенства

$$\boxed{\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_C}}, \quad (4.26)$$

написанного на основании ф-лы (4.25).

Отметим еще, что активное сопротивление r , от которого зависит добротность контура, меняется, вообще говоря, с частотой. Однако при расчете резонансных кривых величину r считают постоянной и равной ее значению на резонансной частоте. Это можно сделать потому, что в небольшой области частот, близких к резонансной частоте контура, где сопротивление контура и ток, протекающий в контуре, сильно зависят от величины r (рис. 4.4), активное сопротивление изменяется незначительно. На частотах же, сильно отличающихся от резонансной частоты, как было показано в конце § 4.2, проводимость контура в основном определяется реактивным сопротивлением x и поэтому изменение r здесь можно не учитывать.

§ 4.6. Напряжение на элементах последовательного колебательного контура

При изменении частоты электродвижущей силы, воздействующей на контур, будет изменяться падение напряжения на конденсаторе U_C и катушке индуктивности U_L . Исследуем закон этого изменения.

Для этого введем понятие коэффициента передачи контура. Под комплексным коэффициентом передачи мы будем понимать отношение напряжения на конденсаторе в комплексной форме

$$U_C = U_C e^{i\psi_C}$$

или на катушке индуктивности

$$U_L = U_L e^{i\psi_L}$$

к электродвижущей силе, выраженной также в комплексной форме,

$$E = E e^{i\varphi}.$$

Мы получим два комплексных коэффициента передачи:

$$\mathbf{K}_C = K_C e^{i\alpha_C} = \frac{\mathbf{U}_C}{\mathbf{E}} = \frac{U_C e^{i\psi_C}}{E e^{i\varphi}} = \frac{U_C}{E} e^{i(\psi_C - \varphi)};$$

$$\mathbf{K}_L = K_L e^{i\alpha_L} = \frac{\mathbf{U}_L}{\mathbf{E}} = \frac{U_L e^{i\psi_L}}{E e^{i\varphi}} = \frac{U_L}{E} e^{i(\psi_L - \varphi)}.$$

Модули комплексных коэффициентов передачи (их мы будем называть просто коэффициентами передачи) будут равны:

$$K_C = \frac{U_C}{E}; \quad K_L = \frac{U_L}{E},$$

а аргументы:

$$\alpha_C = \psi_C - \varphi; \quad \alpha_L = \psi_L - \varphi.$$

Таким образом, коэффициенты передачи равны отношению напряжения на конденсаторе или катушке индуктивности к величине эдс, а аргументы комплексного коэффициента передачи — сдвигу фаз между этими напряжениями и эдс.

Зная, как будут меняться комплексные коэффициенты передачи, мы сможем сказать, как будут меняться \mathbf{U}_C и \mathbf{U}_L .

Начнем рассмотрение с \mathbf{K}_C .

Напряжение на конденсаторе равно

$$\mathbf{U}_C = \mathbf{I} \left(r_C + \frac{1}{i\omega C} \right) = \frac{\mathbf{Y}\mathbf{E}}{i\omega C} (i\omega C r_C + 1),$$

откуда, поскольку

$$r_C \approx \frac{\operatorname{tg} \delta}{\omega C_{\Pi}} \approx \frac{\operatorname{tg} \delta}{\omega C},$$

находим

$$\mathbf{K}_C = \frac{\mathbf{U}_C}{\mathbf{E}} = \frac{\mathbf{Y}}{i\omega C} (1 + i \operatorname{tg} \delta) = K_C e^{i\alpha_C}.$$

Аргумент \mathbf{Y} равен $-\beta$ [ф-ла (4.7)], а аргумент круглой скобки δ . Поэтому аргумент \mathbf{K}_C будет равен

$$\alpha_C = -\beta - \frac{\pi}{2} + \delta.$$

Отсюда видно, что сдвиг фаз α_C между напряжением на конденсаторе \mathbf{U}_C и эдс \mathbf{E} меняется при изменении частоты или параметров контура так же, как сдвиг фаз между током и эдс, отличаясь от него на постоянный угол $-\frac{\pi}{2} + \delta$.

Коэффициент передачи равен модулю \mathbf{K}_C :

$$K_C = \frac{Y}{\omega C} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}.$$

Так как обычно $\operatorname{tg}^2 \delta \ll q$,

$$K_C \approx \frac{Y}{\omega C}. \quad (4.27)$$

На резонансной частоте $\beta = 0$ и $\alpha_C = \alpha_{C_p} = -\frac{\pi}{2} + \delta$. Коэффициент передачи на резонансной частоте будет равен

$$\boxed{K_{C_p} = \frac{Y_p}{\omega_p C} = \frac{1}{r\omega_p C} = \frac{\rho}{r} = Q.} \quad (4.28)$$

Таким образом, напряжение на конденсаторе при резонансной частоте в Q раз больше, чем эдс, и сдвинуто относительно нее на угол $-\frac{\pi}{2} + \delta$.

Деля выражение (4.27) на (4.28), получим

$$\boxed{\frac{K_C}{K_{C_p}} = \frac{Y}{Y_p} \cdot \frac{\omega_p}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} \cdot \frac{\omega_p}{\omega}.} \quad (4.29)$$

Для области частот, близких к резонансной частоте контура, $\frac{\omega_p}{\omega} \approx 1$ и

$$\boxed{\frac{K_C}{K_{C_p}} \approx \frac{Y}{Y_p} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}},} \quad (4.30)$$

т. е. в этой области с изменением ξ коэффициент передачи будет меняться по резонансной кривой.

Для частот, удаленных от полосы пропускания контура, в знаменателе ф-лы (4.29) можно пренебречь единицей по сравнению с ξ^2 и считать, что

$$\frac{K_C}{K_{C_p}} \approx \frac{1}{|\xi|} \cdot \frac{\omega_p}{\omega} = \frac{\frac{\omega_p}{\omega}}{\left| Q \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} \right) \right|}.$$

Умножая числитель и знаменатель полученного равенства на $\frac{\omega}{\omega_p}$ и сокращая равенство на $K_{C_p} = Q$, получим

$$\boxed{K_C \approx \frac{1}{\left| \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 - 1 \right|}.} \quad (4.31)$$

Таким образом, на частотах, удаленных от полосы пропускания, коэффициент передачи зависит только от отношения частоты эдс к резонансной частоте контура.

Из ф-лы (4.31) видно, что при $\omega \rightarrow 0$ $K_C \rightarrow 1$; при $\omega \rightarrow \infty$ $K_C \rightarrow 0$.

На рис. 4.11 дана зависимость K_C от $\frac{\omega}{\omega_p}$ для контура с добротностью $Q = 10$. Сплошная кривая 1 вычислена по точной ф-ле (4.29), пунктирная кривая 2 по приближенной ф-ле (4.30), пригодной для области частот, близких к резонансной частоте контура, и пунктирная кривая 3 — по приближенной ф-ле (4.31), пригодной для больших значений обобщенной расстройки.

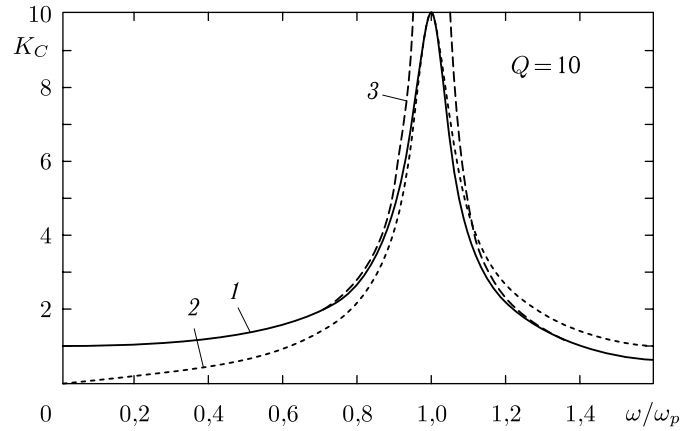


Рис. 4.11. Зависимость K_C от $\frac{\omega}{\omega_p}$ для $Q = 10$. Кривая 1 построена по точной ф-ле (4.29). Кривая 2 построена по приближенной ф-ле (4.30), пригодной для частот, близких к резонансу. Кривая 3 построена по приближенной ф-ле (4.31)

На рис. 4.12 приведены аналогичные кривые для $Q = 100$. В этом случае кривая 1, построенная по точной формуле, слилась с кривой 2, вычисленной по приближенной ф-ле.

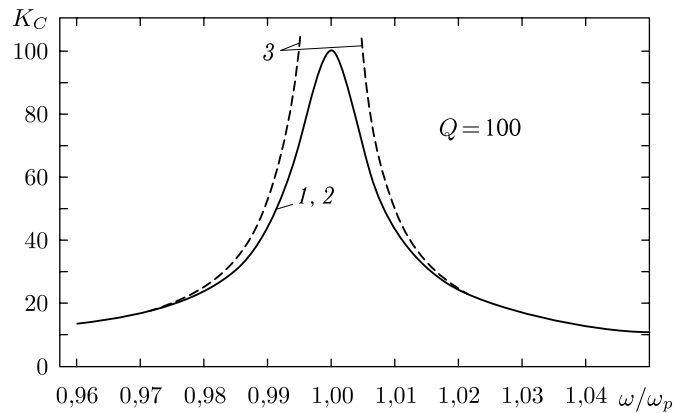


Рис. 4.12. Зависимость K_C от $\frac{\omega}{\omega_p}$ для $Q = 100$. Кривая 1 построена по точной ф-ле (4.29) Кривая 2 (совпадает с кривой 1) построена по приближенной ф-ле (4.30), пригодной для частот, близких к резонансу. Кривая 3 построена по приближенной ф-ле (4.31)

На рис. 4.13 изображены те же кривые, но для $Q = 2,5$. Из этого рисунка видно, что максимум K_C наступает на частоте несколько меньшей, чем резонансная. Это происходит потому, что при малых значени-

ях Q резонансная кривая проводимости Y получается настолько широкой, что в пределах полосы пропускания нельзя считать множитель $\frac{\omega_p}{\omega}$ в ф-ле (4.29) постоянным. Величина этого множителя на частотах, меньших резонансной частоты контура, больше единицы. Следовательно, на этих частотах кривая приподнимается, максимум K_C смещается влево и становится несколько больше Q .

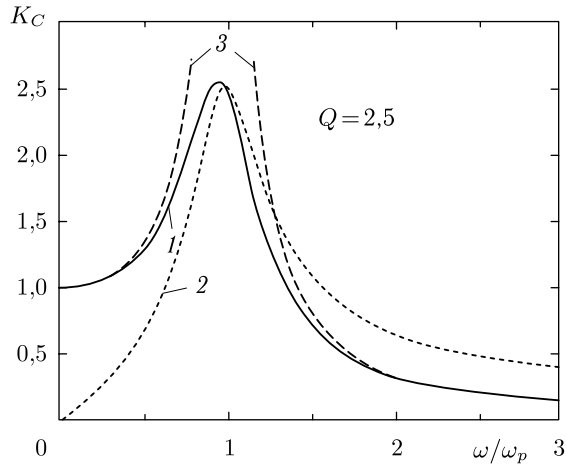


Рис. 4.13. Зависимость K_C от $\frac{\omega}{\omega_p}$ для $Q = 2,5$. Кривая 1 построена по точной ф-ле (4.29). Кривая 2 построена по приближенной ф-ле (4.30), пригодной для частот, близких к резонансу. Кривая 3 построена по приближенной ф-ле (4.31)

Обычный анализ точной ф-лы (4.29) показывает, что максимум наступает на частоте

$$\omega = \omega_{\max} = \omega_p \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad (4.32)$$

и оказывается равным

$$K_C = K_{C \max} = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}. \quad (4.33)$$

При $Q = 100$ получим: $\omega_{\max} = 0,999975\omega_p$ и $K_{C \max} = 1,0000125Q$.

Таким образом, можно считать, что при нормальных значениях добротности максимум K_C наступит на резонансной частоте и будет равен Q .

Аналогично исследуем коэффициент передачи K_L .
Напряжение на катушке индуктивности равно

$$\mathbf{U}_L = \mathbf{I}(r_L + i\omega L) = \mathbf{E}\mathbf{Y}i\omega L \left(\frac{r_L}{i\omega L} + 1 \right),$$

откуда

$$\mathbf{K}_L = \frac{\mathbf{U}_L}{\mathbf{E}} = \mathbf{Y}i\omega L(1 - id_L) = K_L e^{i\alpha_L},$$

где

$$d_L = \frac{r_L}{\omega L}.$$

Аргумент \mathbf{K}_L будет равен

$$\alpha_L = -\beta + \frac{\pi}{2} - \delta_L,$$

где $\delta_L = \arctg d_L$. Обычно $d_L \ll 1$, т. е. $\delta_L \approx d_L$.

Коэффициент передачи равен модулю \mathbf{K}_L :

$$K_L = Y\omega L \sqrt{1 + d_L^2} \approx Y\omega L. \quad (4.34)$$

На резонансной частоте $\beta = 0$ и $\alpha_L = \alpha_p L_p = \frac{\pi}{2} - \delta_L$. Коэффициент передачи на резонансной частоте равен

$$\boxed{K_{L_p} = Y_p \omega_p L = \frac{\omega_p L}{r} = Q.} \quad (4.35)$$

Деля (4.34) на (4.35), получим

$$\boxed{\frac{K_L}{K_{L_p}} = \frac{Y}{Y_p} \cdot \frac{\omega}{\omega_p} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} \cdot \frac{\omega}{\omega_p}.} \quad (4.36)$$

В области частот, близких к резонансной частоте контура, $\frac{\omega}{\omega_p} \approx 1$ и

$$\boxed{\frac{K_L}{K_{L_p}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}},} \quad (4.37)$$

т. е. с изменением ξ K_L изменяется по резонансной кривой.

В областях частот, удаленных от полосы пропускания, $\xi^2 \gg 1$ и

$$\frac{K_L}{K_{L_p}} \approx \frac{1}{|\xi|} \cdot \frac{\omega}{\omega_p} = \frac{\frac{\omega}{\omega_p}}{\left| Q \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} \right) \right|},$$

откуда

$$\boxed{K_L \approx \frac{1}{\left| 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \right|}.} \quad (4.38)$$

Из ф-лы (4.38) видно, что при $\omega \rightarrow 0$ $K_L \rightarrow 0$; при $\omega \rightarrow \infty$ $K_L \rightarrow 1$.

На рис. 4.14, 4.15 и 4.16 изображены зависимости K_L от $\frac{\omega}{\omega_p}$ для $Q = 10$; 100; 2,5. Сплошные кривые 1 вычислены по точной ф-ле (4.36), пунктирные кривые 2 по ф-ле (4.37) и пунктирные кривые 3 по ф-ле (4.38).

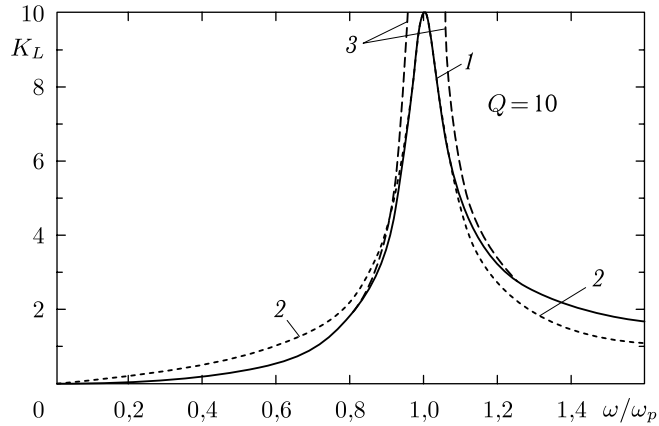


Рис. 4.14. Зависимость K_L от $\frac{\omega}{\omega_p}$ для $Q = 10$. Кривая 1 построена по точной ф-ле (4.36). Кривая 2 построена по приближенной формуле (4.37), пригодной для частот, близких к резонансу. Кривая 3 построена по приближенной ф-ле (4.38)

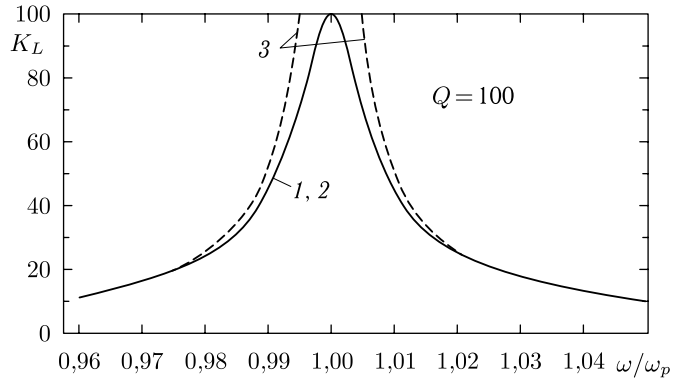


Рис. 4.15. Зависимость K_L от $\frac{\omega}{\omega_p}$ для $Q = 100$. Кривая 1 построена по точной ф-ле (4.36). Кривая 2 (совпадает с кривой 1) построена по приближенной ф-ле (4.37), пригодной для частот, близких к резонансу. Кривая 3 построена по приближенной ф-ле (4.38)

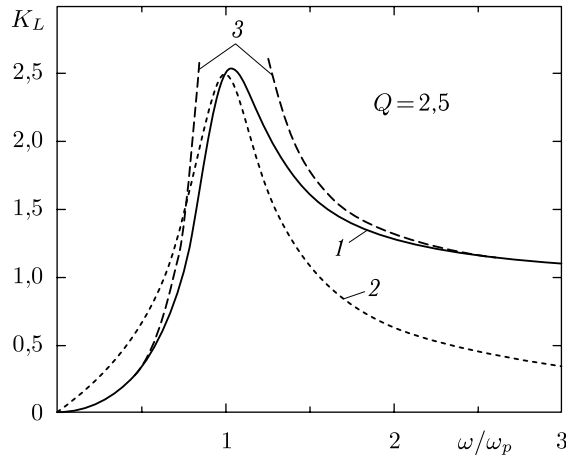


Рис. 4.16. Зависимость K_L от $\frac{\omega}{\omega_p}$ для $Q = 2,5$. Кривая 1 построена по точной ф-ле (4.36). Кривая 2 построена по приближенной ф-ле (4.37), пригодной для частот, близких к резонансу. Кривая 3 построена по приближенной ф-ле (4.38)

Из рис. 4.16 видно, что при малых значениях Q максимум K_L наступает на частоте несколько большей резонансной. Это объясняется тем, что при $\omega > \omega_p$ отношение $\frac{\omega}{\omega_p}$ в формуле (4.36) больше единицы.

Обычный анализ точной ф-лы (4.36) показывает, что максимум K_L наступает на частоте

$$\omega = \omega_{\max} = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} \quad (4.39)$$

и оказывается равным

$$K_L = K_{L_{\max}} = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}. \quad (4.40)$$

Из ф-л (4.39) и (4.40) видно, при нормальных значениях Q (порядка ста) можно с достаточной точностью считать $\omega_{\max} = \omega_p$ и $K_{L_{\max}} = Q$.

Пример 1.3. В колебательном контуре с параметрами, приведенными в примере 4.1, действует эдс в виде последовательности половинок синусоиды (см. рис. 4.17) с основной частотой $\frac{\omega_0}{2\pi}$. Требуется найти напряжение на конденсаторе контура.

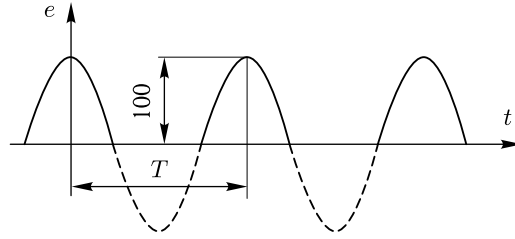


Рис. 4.17. Временная диаграмма эдс примера 4.3

Решение. Аналитически с помощью ряда Фурье заданная эдс может быть выражена так ¹⁾:

$$e = \frac{100}{\pi} \left[1 + \frac{\pi}{2} \cos \omega_0 t + \frac{2}{3} \cos 2\omega_0 t - \frac{2}{15} \cos 4\omega_0 t + \dots \right] = \\ = 31,8 + 50 \cos \omega_0 t + 21,2 \cos 2\omega_0 t - 4,24 \cos 4\omega_0 t + \dots$$

Применяя принцип наложения (суперпозиции), мы найдем напряжения на конденсаторе отдельно для различных составляющих и затем полученные значения сложим. Для постоянной составляющей ($\omega = 0$) согласно сказанному выше

$$K_{C_0} = 1.$$

Для частоты ω_0 , являющейся резонансной, на основании ф-лы (4.20) получим

$$K_{C_{\omega_0}} = K_{C_p} = Q = 100, \quad \alpha_{C_{\omega_0}} = \alpha_{C_p} = -\frac{\pi}{2} + \delta \approx -\frac{\pi}{2}$$

и

$$K_{c_{\omega_0}} = K_{C_p} = 100 e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

На частоте $2\omega_0$ получим

$$\xi = Q \left(\frac{2\omega_0}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{2\omega_0} \right) = 100 \left(2 - \frac{1}{2} \right) = 150.$$

При таком ξ можно считать, что $\beta = \frac{\pi}{2}$ и пользоваться приближенной ф-лой (4.31). Мы получим

$$K_{C_{2\omega_0}} = \frac{1}{\left| \left(\frac{2\omega_0}{\omega_p} \right)^2 - 1 \right|} = \frac{1}{3}.$$

Аргумент $K_{C_{2\omega_0}}$ будет отличаться от K_{C_p} на $-\beta$, поэтому

$$K_{C_{2\omega_0}} = K_{C_{2\omega_0}} e^{-i(\frac{\pi}{2} + \beta)} = \frac{1}{3} e^{-i\pi}.$$

Аналогично

$$K_{C_{4\omega_0}} = \frac{1}{\left| \left(\frac{4\omega_0}{\omega_p} \right)^2 - 1 \right|} = \frac{1}{15}, \\ K_{C_{4\omega_0}} = \frac{1}{15} e^{-i\pi}.$$

¹⁾ См. К. А. Круг. Основы электротехники, т. 2, стр. 239–240, изд. 1946 г.

По полученным коэффициентам усиления найдем составляющие разных напряжения на конденсаторе. Сложив их, будем иметь:

$$U_C = 31,8K_{C_0} + 50K_{C_{\omega_0}} \left(\cos \omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right) + 21,2K_{C_{2\omega_0}} \cos(2\omega_0 t - \pi) - \\ - 4,24K_{C_{4\omega_0}} \cos(4\omega_0 t - \pi) + \dots = 31,8 + 5000 \cos \left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right) - \\ - 7,07 \cos 2\omega_0 t + 0,283 \cos 4\omega_0 t + \dots$$

Таким образом, несмотря на то, что эдс в контуре не синусоидальна, напряжение на конденсаторе будет почти синусоидальным, поскольку амплитуда первой гармоники напряжения много больше, чем амплитуды высших гармоник.

§ 4.7. Энергетические соотношения в колебательном контуре при резонансе

Пусть в контуре действует эдс с частотой, равной резонансной частоте контура,

$$e = E_m \cos(\omega_p t + \varphi).$$

Тогда ток в контуре будет равен

$$i = I_m \cos(\omega_p t + \varphi),$$

где

$$I_m = \frac{E_m}{r}.$$

Мощность, переходящая в контуре в тепло, равна

$$P_T = ri^2 = rI_m^2 \cos^2(\omega_p t + \varphi) = rI_m^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\omega_p t + \varphi) \right]. \quad (4.41)$$

Мощность, отдаваемая источником эдс,

$$P_{\text{эдс}} = ei = E_m I_m \cos^2(\omega_p t + \varphi) = rI_m^2 \cos^2(\omega_p t + \varphi).$$

Таким образом, мощность, отдаваемая источником эдс, целиком переходит в тепло.

Энергия магнитного поля катушки индуктивности равна

$$W_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \cos^2(\omega_p t + \varphi) = \frac{LI_m^2}{2} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\omega_p t + \varphi) \right]. \quad (4.42)$$

Напряжение на конденсаторе определяется следующим образом:

$$u_C = \frac{I_m}{\omega_p C} \sin(\omega_p t + \varphi)$$

(поскольку напряжение на конденсаторе отстает на 90° от тока, протекающего через него).

Энергия электрического поля конденсатора равна

$$W_{\text{э}} = \frac{Cu_C^2}{2} = \frac{CI_m^2}{2\omega_p^2 C^2} \sin^2(\omega_p t + \varphi) = \frac{LI_m^2}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2(\omega_p t + \varphi) \right] \quad (4.43)$$

(так как $\omega_p^2 = \frac{1}{LC}$).

Общая энергия электрического и магнитного поля, равная

$$W_{\text{э}} + W_{\text{м}} = \frac{LI_m^2}{2}, \quad (4.44)$$

все время остается постоянной.

В момент, когда $i = 0$, $W_{\text{м}} = 0$ — вся энергия поля сосредоточена в конденсаторе. Через четверть периода $u_C = 0$, $W_{\text{э}} = 0$ — вся энергия поля будет сосредоточена в катушке индуктивности.

Поскольку энергия поля остается постоянной, источник эдс не расходует мощность на ее изменение и, как мы видели, мощность эдс идет на покрытие потерь энергии, переходящей в тепло.

Энергия, переходящая в тепло, в течение периода будет равна

$$W_T = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} P_T dt = \frac{rI_m^2}{2} T, \quad (4.45)$$

откуда

$$\frac{W_{\text{э}} + W_{\text{м}}}{W_T} = \frac{\frac{LI_m^2}{2}}{\frac{rI_m^2}{2} T} = \frac{L}{rT} = \frac{\frac{2\pi}{T} L}{2\pi r} = \frac{\omega_0 L}{2\pi r},$$

или

$$\boxed{\frac{W_{\text{э}} + W_{\text{м}}}{W_T} = \frac{Q}{2\pi}}. \quad (4.46)$$

Таким образом, отношение энергии, запасенной в поле колебательного контура при резонансе, к энергии, которая тратится в контуре за период, целиком определяется добротностью контура.