ИМПУЛЬСЫ С НАИМЕНЬШЕЙ ЭНЕРГИЕЙ В СПЕКТРЕ ЗА ПРЕДЕЛАМИ ЗАДАННОЙ ПОЛОСЫ

В. А. Котельников

Радиотехника и электроника, 1997, т. 42, № 4, с. 436–441

Рассмотрены импульсы, имеющие в спектре за пределами заданной полосы частот теоретически возможную наименьшую энергию. Даны методы расчета формы таких импульсов и их параметров. Полученные результаты позволяют оценить, насколько импульсы в конкретных системах близки к оптимальным и есть ли возможность существенно уменьшить энергию их спектра за пределами заданной полосы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим импульсы, имеющие вид, изображенный на рис. 1 и состоящие из *полезной* части на участке a, b, используемой для анализа сигнала при приеме, и «хвостов» a', a и b, b'. Если эти хвосты достаточно малы, то на них могут быть наложены другие импульсы без сильного искажения. Таким образом, они не будут отнимать на себя время, но могут иногда, как будет показано ниже, существенно улучшить спектр.

Для упрощения импульсы будем рассматривать без высокочастотного заполнения, к нему можно перейти, пользуясь свойствами модулированных колебаний.

Введем ряд обозначений. *Энергию полезного участка* импульса обозначим через

$$W_{\text{п}} = \int\limits_a^b f^2 dt \tag{1}$$

и *энергию хвостов* импульса — через

$$W_{\text{х}} = \int\limits_{a'}^{a} f^2 dt + \int\limits_b^{b'} f^2 dt. \tag{2}$$

Здесь через f обозначена функция времени t, изображающая импульс.

В рассматриваемом случае

$$f = 0 \text{ при } t < a' \text{ и } t > b'. \tag{3}$$

Как известно [1], такой импульс имеет спектр, простирающийся до бесконечности, если значения a' и b' конечны.

Энергию спектра импульса за пределами заданной полосы $(-\Omega, \Omega)$ будем обозначать $W_{\text{в}}$ и называть *вредной*, поскольку она может вызывать помехи, тут $\Omega = 2\pi/T$ — угловая *граничная частота*, T — *период граничной частоты*.

В данной работе рассмотрен метод отыскания импульса, у которого при заданной частоте Ω, продолжительности хвостов и полезного участка, а также отношении

$$h_{\text{х}} = W_{\text{х}}/W_{\text{п}} \tag{4}$$

величина

$$h_{\text{в}} = W_{\text{в}}/W_{\text{п}} \tag{5}$$

будет наименьшей. Такой импульс будем называть оптимальным для данного h_x.

2. Теория

В дальнейшем будем считать, что величины a', a, b, b' и Ω заданы. Обозначим

$$h_R = h_{\text{в}} + Rh_{\text{х}}, \tag{6}$$

где $R \geqslant 0$ — некоторый параметр.

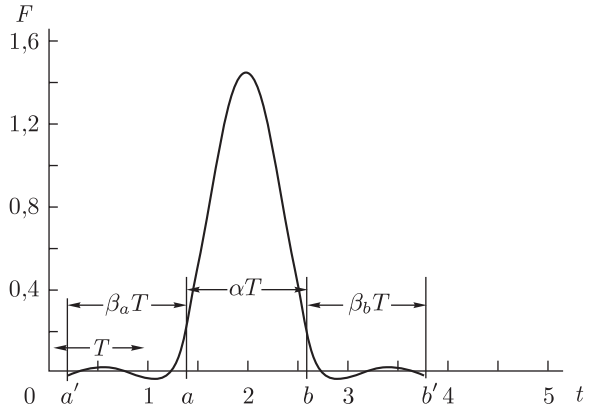

Рис. 1. Оптимальный импульс с параметрами $\alpha = \beta_a = \beta_b = 1{,}2$. Полезный участок a, b, хвосты a', a; b, b'; $T = 2\pi/\Omega$ — период граничной частоты, $H_{\text{х}} = 2{,}775 \times 10^{-3}$, $H_{\text{в}} = 1{,}231 \times 10^{-3}$

Как легко показать, всегда $h_R \geqslant 0$, поэтому параметр h_R должен иметь наименьшее значение. Пусть это значение при заданном R появляется при $f = F$ и равно H_R. Значения $h_{\text{в}}$, $h_{\text{х}}$ при этом обозначим через $H_{\text{в}}$, $H_{\text{х}}$.

Поскольку по условию

$$h_{\text{в}} + Rh_{\text{х}} = h_R \geqslant H_R = H_{\text{в}} + RH_{\text{х}},$$

очевидно, что при f, для которых $h_{\text{х}} = H_{\text{х}}$, всегда $h_{\text{в}} \geqslant H_{\text{в}}$, причем равенство справедливо при $f = F$. Таким образом $H_{\text{в}}$ является наименьшей величиной $h_{\text{в}}$ при $h_{\text{х}} = H_{\text{х}}$. Это доказывает следующую лемму.

Лемма. *Функция $f = F$, отвечающая наименьшему значению h_R при заданном R, соответствует оптимальному импульсу для H_x.*

Аналогично можно доказать, что при оптимальном импульсе и выборе такого значения f, при котором $h_{\text{в}} = H_{\text{в}}$, наименьшее значение $h_{\text{х}} = H_{\text{х}}$.

Докажем следующую теорему.

Теорема. *Импульс на рис.* 1 *будет оптимальным, если соответствующая ему функция $f = F$ удовлетворяет следующим условиям*:

на участках $(-\infty, a')$, (b', ∞) $F = 0$ *по условию* (3),

на участках (a', a), (b, b')

$$F = \frac{1}{1+R} F_{н}, \tag{7}$$

на участке (a, b)

$$F = (1+V) F_{н}, \tag{8}$$

$F_{н}$ — функция, спектр которой лежит в пределах $(-\Omega, \Omega)$, обеспечивающая при заданном R наименьшую величину выражения

$$V = \frac{\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{a'} F_{\text{н}}^2\,dt + \frac{R}{1+R}\left(\int\limits_{a'}^{a} F_{\text{н}}^2\,dt + \int\limits_{b}^{b'} F_{\text{н}}^2\,dt\right) + \int\limits_{b'}^{\infty} F_{\text{н}}^2\,dt}{\displaystyle\int\limits_{a}^{b} F_{\text{н}}^2\,dt}. \tag{9}$$

Доказательство. В соответствии с леммой для доказательства теоремы необходимо найти условия для функции f, при которой h_R имеет наименьшую величину.

Введем понятие *низкочастотной части функции* f и будем понимать под ней

$$f_{\text{н}} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\Omega}^{\Omega} G(\omega) \exp(i\omega t) dt,$$

где

$$G(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f \exp(-i\omega t) dt$$

— спектр функции f. Таким образом, $f_{\text{н}}$ получаем из f путем отбрасывания составляющих с частотами по модулю, бóльшими, чем Ω. Функция $f_{\text{н}}$ всегда непрерывна и простирается от $-\infty$ до ∞.

Очевидно, что

$$W_{\text{в}} = \int\limits_{a'}^{b'} f^2 dt - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\text{н}}^2 \, dt. \tag{10}$$

Теперь в соответствии с (1), (2), (4)–(6), (10), можно записать

$$h_R = \frac{\int\limits_{a'}^{b'} f^2 dt - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\text{н}}^2 \, dt + R \left(\int\limits_{a'}^{a} f^2 dt + \int\limits_{b}^{b'} f^2 dt \right)}{\int\limits_{a}^{b} f^2 dt}. \tag{11}$$

Подставим в это выражение

$$f = F + \mu\varphi \quad \text{и} \quad f_{\text{н}} = F_{\text{н}} + \mu\varphi_{\text{н}}, \tag{12}$$

где $\mu > 0$ — малая постоянная, φ — произвольная функция, удовлетворяющая условию

$$\varphi = 0 \quad \text{при } t < a' \text{ и } t > b', \tag{13}$$

$\varphi_{\text{н}}$, $F_{\text{н}}$, $f_{\text{н}}$ — низкочастотные части φ, F, f.

Разлагая полученное выражение по степеням μ и отбрасывая члены, содержащие μ во второй и более высоких степенях, получим

$$h_R = \frac{A}{B} \left[1 + \frac{2\mu}{A} \left(\int\limits_{a'}^{b'} F\varphi \, dt - \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_{\text{н}}\varphi_{\text{н}} \, dt + \right.\right.$$
$$\left.\left. + R \int\limits_{a'}^{a} F\varphi \, dt + R \int\limits_{b}^{b'} F\varphi \, dt - \frac{A}{B} \int\limits_{a}^{b} F\varphi \, dt \right) \right], \tag{14}$$

где A — числитель выражения (11) при $f = F$; B — знаменатель.

Для того чтобы избавиться от $\varphi_{\text{н}}$, преобразуем второй интеграл в (14). В соответствии с теоремой Парсеваля (см. приложение 1), принимая во внимание, что $F_{\text{н}}$ имеет спектр в пределах $(-\Omega, \Omega)$ и

функция φ удовлетворяет условию (13), получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_{\text{н}}\varphi_{\text{н}}\,dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_{\text{н}}\varphi\,dt = \int\limits_{a'}^{b'} F_{\text{н}}\varphi\,dt.$$

Далее, разбивая интервалы интегрирования на участки (a', a), (a, b), (b, b'), компонуя их и учитывая, что $A/B = H_R$, находим

$$h_R = H_R\left\{1 + \frac{2\mu}{A}\left[\int\limits_{a'}^{a}(F - F_{\text{н}} + RF)\varphi\,dt + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int\limits_{a}^{b}(F - F_{\text{н}} - H_R F)\varphi\,dt + \int\limits_{b}^{b'}(F - F_{\text{н}} + RF)\varphi\,dt\right]\right\}.$$

Если здесь выражения в скобках под интегралами не равны нулю на участках интегрирования, то всегда можно выбрать такое значение φ, что интегралы будут отрицательными и $h_R < H_R$, а это противоречит условию: $H_R \leqslant h_R$. Таким образом, F должно удовлетворять следующим условиям:

$$\text{на участках } (a', a),\ (b, b') \quad F = \frac{1}{1+R}F_{\text{н}}, \tag{15}$$

$$\text{на участке } (a, b) \quad F = \frac{1}{1-H_R}F_{\text{н}}. \tag{16}$$

Отметим, что условия (15) и (16) будут справедливы не только при минимуме h_R, но и при максимуме и других экстремумах этой величины.

Значения H_R можно найти, подставив F и $F_{\text{н}}$ в (11) вместо f и $f_{\text{н}}$ и далее, заменив F при помощи (15) и (16). При этом получим

$$\frac{H_R}{1-H_R} = \frac{\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{a'} F_{\text{н}}^2\,dt + \frac{R}{1+R}\left(\int\limits_{a'}^{a} F_{\text{н}}^2\,dt + \int\limits_{b}^{b'} F_{\text{н}}^2\,dt\right) + \int\limits_{b'}^{\infty} F_{\text{н}}^2\,dt}{\displaystyle\int\limits_{a}^{b} F_{\text{н}}^2\,dt} = V. \tag{17}$$

Отсюда

$$H_R = \frac{V}{1+V}. \tag{18}$$

Равенства (16) и (18) доказывают справедливость условия (8) теоремы, равенство (15), правильность (7).

Для того чтобы функция F соответствовала оптимальному импульсу согласно лемме, значение H_R должно быть наименьшим. Поэтому,

учитывая (18), функцию F необходимо выбирать так, чтобы значение V было минимальным.

При доказательстве принимали, что $F_{\text{н}}$ является низкочастотной частью F. Это будет так, если $F - F_{\text{н}}$ не содержит составляющих в полосе $(-\Omega, \Omega)$. Поэтому в соответствии с теоремой Парсеваля

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (F - F_{\text{н}}) \frac{\sin(\Omega t - k\theta)}{\Omega t - k\theta} = 0 \tag{19}$$

при любых постоянных k и θ, поскольку $\dfrac{\sin(\Omega t - k\theta)}{\Omega t - k\theta}$ имеет составляющие только в этой полосе.

Покажем справедливость равенства (19) при соблюдении условий (7)–(9). Функция $F_{\text{н}}$, как имеющая спектр в пределах $(-\Omega, \Omega)$, всегда может быть представлена рядом

$$F_{\text{н}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \frac{\sin(\Omega t - k\theta)}{\Omega t - k\theta}, \tag{20}$$

где k — целое число, $\theta \leqslant \pi$ — постоянная величина. Поэтому

$$\frac{\partial F_{\text{н}}}{\partial x_k} = \frac{\sin(\Omega t - k\theta)}{\Omega t - k\theta}$$

и, следовательно, равенство (19) можно переписать так:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (F - F_{\text{н}}) \frac{\partial F_{\text{н}}}{\partial x_k} dt = 0.$$

Выражая при этом F через $F_{\text{н}}$ при помощи (7) и (8) и принимая во внимание

$$\int F_{\text{н}} \frac{\partial F_{\text{н}}}{\partial x_k} dt = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \int F_{\text{н}}^2 \, dt,$$

а также учитывая, что величина V соответствует экстремуму и поэтому может быть принята как постоянная, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (F - F_{\text{н}}) \frac{\partial F_{\text{н}}}{\partial x_k} dt = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[- \int\limits_{-\infty}^{a'} F_{\text{н}}^2 \, dt - \right.$$
$$\left. - \frac{R}{1+R} \left(\int\limits_{a'}^{a} F_{\text{н}}^2 \, dt + \int\limits_{b}^{b'} F_{\text{н}}^2 \, dt \right) - \int\limits_{b'}^{\infty} F_{\text{н}}^2 \, dt + V \int\limits_{a}^{b} F_{\text{н}}^2 \, dt \right]. \tag{21}$$

Сравнивая (21) с (9), видим, что сумма первых трех слагаемых в квадратных скобках равна $-V\int\limits_a^b F_{\text{н}}^2\,dt$. Отсюда следует, что правая часть (21) равна нулю. Это доказывает равенство (19) и то, что любая функция $F_{\text{н}}$, выражаемая рядом (20), при соблюдении условий (7)–(9) будет низкочастотной частью F.

Таким образом, все положения теоремы доказаны.

Перейдем к отысканию значения $F_{\text{н}}$, при котором будет обеспечено наименьшее значение выражения (10) для V. Для этого раскроем интегралы, входящие в это выражение. Возьмем интеграл

$$\int\limits_u^{u'} f_{\text{н}}^2\,dt = \int\limits_u^{u'} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \frac{\sin(\Omega t - k\theta)}{\Omega t - k\theta}\right)^2 dt = \\ = \sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} [E_{l,m}(u') - E_{l,m}(u)]x_l x_m, \quad (22)$$

где

$$E_{l,m}(u) = \int\limits_{-\infty}^{u} \frac{\sin(\Omega t - l\theta)\sin(\Omega t - m\theta)}{(\Omega t - l\theta)(\Omega t - m\theta)}dt.$$

Проведя интегрирование, при $l \neq m$ получим

$$E_{l,m}(u) = \frac{\cos[(l-m)\theta]}{2\Omega(l-m)\theta}[\mathrm{Cin}(2\Omega u - 2l\theta) - \mathrm{Cin}(2\Omega u - 2m\theta)] + \\ + \frac{\sin[(l-m)\theta]}{2\Omega(l-m)\theta}[\mathrm{Si}(2\Omega u - 2l\theta) + \mathrm{Si}(2\Omega u - 2m\theta) + \pi] \quad (23)$$

и

$$E_{m,m}(u) = \frac{1}{\Omega}\left[\frac{\cos(2\Omega u - 2m\theta) - 1}{2\Omega u - 2m\theta} + \mathrm{Si}(2\Omega u - 2m\theta) + \frac{\pi}{2}\right].$$

Переходя к пределу, для $u = \infty$ при $l \neq m$ получим

$$E_{l,m}(\infty) = \frac{\pi\sin[(l-m)\theta]}{\Omega(l-m)\theta}$$

и

$$E_{m,m}(\infty) = \pi/\Omega.$$

Здесь использованы общепринятые обозначения:

$$\mathrm{Cin}(z) = \int\limits_0^z \frac{1-\cos y}{y}dy, \quad \mathrm{Si}(z) = \int\limits_0^z \frac{\sin y}{y}dy.$$

Для этих функций имеются формулы и таблицы [2], они легко вычисляются при помощи ЭВМ.

Подставляя значения интегралов в выражение (9) для V и учитывая (22), получим

$$V = \frac{\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty} \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} A_{l,m} x_l x_m}{\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty} \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} B_{l,m} x_l x_m}, \tag{24}$$

где

$$A_{l,m} = E_{l,m}(a') + \frac{R}{1+R}[E_{l,m}(a) - E_{l,m}(a') + E_{l,m}(b') - E_{l,m}(b)] + \\ + E_{l,m}(\infty) - E_{l,m}(b') = \frac{1}{1+R}[E_{l,m}(a') - E_{l,m}(b')] + \\ + \frac{R}{1+R}[E_{l,m}(a) - E_{l,m}(b)] + E_{l,m}(\infty), \tag{25}$$

и

$$B_{l,m} = E_{l,m}(b) - E_{l,m}(a). \tag{26}$$

Задаваясь Ω, a', a, b, b' и различными R, можно отыскать при помощи (24) значения x_k, дающие наименьшее V. По этим x_k при помощи (4) и (5) можно получить значения $H_{\text{х}}$, $H_{\text{в}}$ и определить зависимость между ними.

Выражение для наименьшего V и других параметров оптимальных импульсов получить в общем виде через известные функции не удалось. Поэтому x_k рассчитывали по методу, аналогичному описанному в Приложении [3].

3. Результаты расчетов

Как видно из (23) и (24), x_k и, следовательно, f, V, $H_{\text{х}}$, $H_{\text{в}}$ будут зависеть от R, а также от $\Omega a'$, Ωa, Ωb, $\Omega b'$. При учете, что они не должны зависеть от выбора начала отсчета времени, указанные величины будут определяться разностями

$$\Omega a - \Omega a' = \frac{2\pi}{T}(a - a') = 2\pi\beta_a,$$
$$\Omega b - \Omega a = \frac{2\pi}{T}(b - a) = 2\pi\alpha,$$
$$\Omega b' - \Omega b = \frac{2\pi}{T}(b' - b) = 2\pi\beta_b.$$

Здесь

$$\beta_a = \frac{a - a'}{T}, \quad \alpha = \frac{b - a}{T}, \quad \beta_b = \frac{b' - b}{T}.$$

Результаты численных расчетов приведены на рис. 2, *а*, 2, *б* соответственно для $\beta_b = \infty$ и $\beta_b = \beta_a$. На рисунках по осям отложены десятичные логарифмы $H_{\text{х}}$ и $H_{\text{в}}$. Таким образом, одно деление соответствует 10 дБ.

Кривые зависимостей для различных α представлены в виде отдельных пучков. Чем больше значение α, тем ниже проходит пучок. Каждый пучок состоит из кривых для различных β_a. При более длинном переднем хвосте и большем β_a кривые проходят ниже.

Когда $H_{\text{х}} \to 0$, кривые асимптотически приближаются к значению $H_{\text{в}} = H_0$, которое соответствует $H_{\text{х}} = 0$ при данном α, т. е. к случаю, когда нет хвостов. Зависимость $\lg H_0$ от α приведена на рис. 3. Этот случай, как видно из (7), соответствует $R = \infty$.

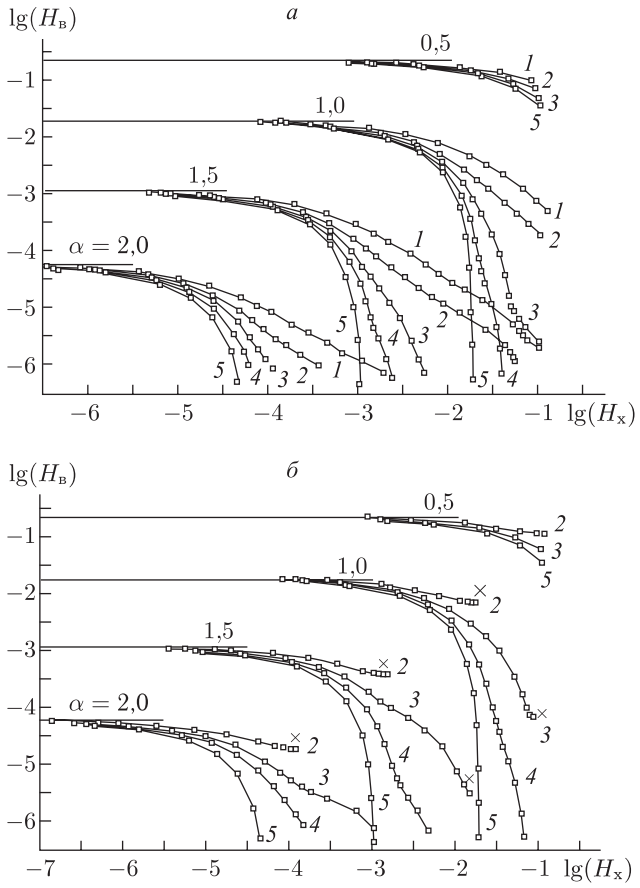

Рис. 2. Зависимость $\lg H_{\text{в}}$ от $\lg H_{\text{х}}$ при $\beta_b = \infty$ (а) и $\beta_b = \beta_a$ (б). $\beta_a = 0$; 0.1; 0.5; 2; ∞

При уменьшении R и сохранении других параметров постоянными величина $H_{\text{в}}$ уменьшается, а $H_{\text{х}}$ увеличивается. Расчеты проводили для значений $R = \infty$; 10; 5; 2; 1; 0.5; 0.2; ... и до тех пор, пока результаты не выходили за пределы рисунка или до $R = 0$. Последние случай отмечены знаком $\times$. Значения $R < 0$ не имеют смысла, при них $H_{\text{в}}$ увеличивается с ростом $H_{\text{х}}$.

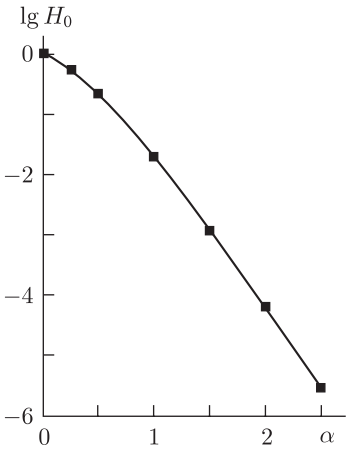

Рис. 3. Зависимость $\lg H_0$ от α, где $H_0 = H_{\text{в}}$ при $\beta_a = \beta_b = 0$

На рис. 2 приведены также кривые для $\beta_a = \beta_b = \infty$. Такой случай практически не осуществим, так как импульс при этом надо начинать в $-\infty$. Однако его можно рассматривать как предельный: он дает наименьшее значение $H_{\text{в}}$ при заданных α и $H_{\text{х}}$. Зависимость $H_{\text{в}}$ от $H_{\text{х}}$ для этого случая может быть выражена, как показано в приложении 2, формулой

$$H_{\text{в}} \left[\sqrt{H_0} - \sqrt{(1 - H_0) H_{\text{х}}} \right]^2, \qquad (27)$$

где H_0 — значение $H_{\text{в}}$ при заданном α и $\beta_a = \beta_b = 0$.

Как видно из формулы (27), при

$$H_{\text{х}} = \frac{H_0}{1 - H_0}$$

значение $H_{\text{в}}$ становится равным нулю. В этом случае $R = V = 0$ (см. приложение 2)и F в соответствии с (7) и (8) становится равным $F_{\text{н}}$ на всем участке t от $-\infty$ до ∞.

Расчеты показали, что при параметрах рис. 2 в полосе частот $(\Omega, 2\Omega)$, т. е. в соседнем канале, лежит примерно 3/4 энергии всего вредного спектра. При малых $H_{\text{в}}$ эта доля еще больше увеличивается.

На рис. 1 приведен пример оптимального импульса при $\alpha = \beta_a = \beta_b = 1, 2$, а на рис. 4 — его спектр.

Расчеты проводили при числе членов в (20), равном 9. Увеличение числа членов при $\alpha \leqslant 2$ на результат практически не сказывалось. За нулевой отсчет времени выбрана середина полезного участка. Для улучшения сходимости принимали $\theta = 2\pi/3$.

Ранее были рассмотрены отдельные частные случаи импульсов. Случаи $\beta_a = \beta_b = 0$ и $\beta_a = 0$, $\beta_b = \infty$ описаны в [3], случаи $\beta_a = \beta_b = 0$ и $\beta_a = \beta_b = \infty$ в [4].

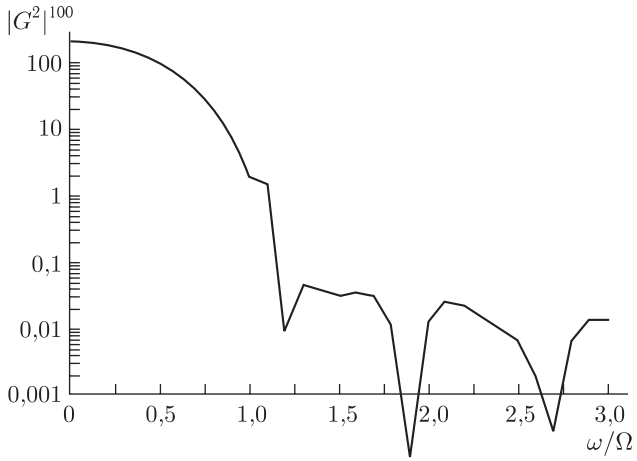

Рис. 4. Спектр оптимального импульса с параметрами $\alpha = \beta_a = \beta_b = 1,2$

Приложение 1

По теореме Парсеваля

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_1(\omega) g_2^*(\omega) dt,$$

где

$$g_1(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \exp(-i\omega t) dt,$$

$$g_2(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(t) \exp(-i\omega t) dt.$$

Значком $*$ отмечена комплексно-сопряженная величина.

Теорема легко доказывается для периодических функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ с последующим переходом к бесконечному периоду.

Приложение 2

Выведем зависимость $H_{\text{в}}$ от $H_{\text{х}}$ для частного случая $a' = -\infty$, $b' = \infty$, т. е. для случая, когда оба хвоста уходят в бесконечность.

На основании (1), (2), (4), (5), (9), (10) для этого случая имеем

$$H_{\text{в}} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} F^2 dt - \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_{\text{н}}^2\, dt}{\int\limits_{a}^{b} F^2 dt}, \quad H_{\text{х}} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{a} F^2 dt + \int\limits_{b}^{\infty} F^2 dt}{\int\limits_{a}^{b} F^2 dt},$$

$$V = \frac{\dfrac{R}{1+R}\left(\int\limits_{-\infty}^{a} F_{\text{н}}^2\, dt + \int\limits_{b}^{\infty} F_{\text{н}}^2\, dt\right)}{\int\limits_{a}^{b} F_{\text{н}}^2\, dt}.$$

Выражая F через $F_{\text{н}}$ при помощи уравнений (7), (8) и вводя параметр

$$e = \frac{\int\limits_{-\infty}^{a} F_{\text{н}}^2\, dt + \int\limits_{b}^{\infty} F_{\text{н}}^2\, dt}{\int\limits_{a}^{b} F_{\text{н}}^2\, dt}$$

получим

$$H_{\text{в}} = \frac{\dfrac{1}{(1+R)^2} - 1}{(1+V)^2} e + \frac{(1+V)^2 - 1}{(1+V)^2}, \tag{П.1}$$

$$H_{\text{х}} = \frac{e}{(1+R)^2 (1+V)^2}, \tag{П.2}$$

$$V = \frac{R}{1+R} e. \tag{П.3}$$

Исключим из этих уравнений V и R. При этом из (П.3) получаем

$$R = \frac{V}{e - V}.$$

Подставляя в (П.2) полуденное выражение, имеем

$$H_{\text{х}} = \frac{(e-V)^2}{e(1+V)^2}.$$

Решая это уравнение, получим

$$V = \frac{e \mp \sqrt{eH_{\text{х}}}}{1 \pm \sqrt{eH_{\text{х}}}}, \quad 1 + V = \frac{1+e}{1 \pm \sqrt{eH_{\text{х}}}}, \quad 1 + R = \frac{e(1 \pm \sqrt{eH_{\text{х}}})}{(e+1)\sqrt{eH_{\text{х}}}}. \tag{П.4}$$

Подставляя эти значения в (П.1), имеем

$$H_{\text{в}} = \frac{e}{1+e} + \frac{H_{\text{х}}}{1+e} \mp 2\sqrt{\frac{e}{1+e}\frac{H_{\text{х}}}{1+e}} = \left(\sqrt{\frac{e}{1+e}} - \sqrt{\frac{H_{\text{х}}}{1+e}}\right)^2. \quad (\text{П.5})$$

Здесь взят верхний знак, так как нам нужно меньшее значение.

При $H_{\text{х}} = 0$ получим $H_{\text{в}} = H_0 = \dfrac{e}{1+e}$. Таким образом, имеем

$$H_{\text{в}} = \left(\sqrt{H_0} - \sqrt{(1-H_0)H_{\text{х}}}\right)^2.$$

Очевидно, что если $H_{\text{х}} = \dfrac{H_0}{1-H_0} = e$, то $H_{\text{в}} = 0$. Это соответствует случаю, когда согласно (П.4) выбирая верхний знак, имеем $R = V = 0$ и, следовательно, в соответствии с (7) и (8) $F = F_{\text{н}}$ для всех t.

Список литературы

1. *Розенкрофт Д. Ж., Джекобс И.* Теоретические основы техники связи. — М.: Мир, 1969.
2. Справочник по специальным функциям / Под ред. Абрамовича М. и Стиган И. М.: Наука, 1979.
3. *Котельников В. А.* // РЭ. 1996. Т. 41. № 7, с. 773.
4. *Landau H. J., Pollak H. O.* // Bell System Techn. J. 1961. V. 40. № 1. P. 65.

Поступила
в редакцию 28.10.96 г.