ВИНТЫ

И

КОМПЛЕКСНЫЯ ЧИСЛА.

А. П. КОТЕЛЬНИКОВА

Приватъ-доцента Казанскаго Университета.

КАЗАНЬ.
Типо-литографія Императорскаго Университета.
1896.

Печатано по опредѣленію физико-математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ.

Предсѣдатель *А. Васильевъ*.

Винты и комплексныя числа [1].

Такъ называемыя простыя машины: рычагъ, наклонная плоскость, блоки, винтъ, веревка и пр. играютъ въ механикѣ довольно важную роль. Я не имѣю въ виду указывать на значеніе ихъ въ механикѣ практической: всякій конечно знаетъ, что нѣтъ ни одной машины, въ которую, какъ ея составная часть, не входила бы та или другая изъ упомянутыхъ простыхъ машинъ. Я не намѣренъ также говорить о значеніи этихъ машинъ въ исторіи механики; напомню только, что вопросы о законахъ равновѣсія силъ, дѣйствующихъ на простыя машины, были тѣми вопросами, успѣшное рѣшеніе которыхъ послужило основаніемъ теоретической механики. Заговоривъ о простыхъ машинахъ, я желалъ бы обратить Ваше вниманіе на то, что онѣ играютъ еще иную роль, кромѣ вышеуказанныхъ, а именно роль научныхъ методовъ, которые во многихъ случаяхъ служили къ доказательству и открытію весьма важныхъ теоремъ и принциповъ механики. Такъ, Архимедомъ, а затѣмъ учеными эпохи возрожденія было обнаружено, что законы равновѣсія другихъ простыхъ машинъ можно свести на законы равновѣсія прямолинейнаго равноплечаго рычага. Эти ученые возвели такимъ образомъ прямолинейный равноплечій рычагъ на степень научнаго принципа, котораго было достаточно для того, чтобы дедуктивнымъ путемъ рѣшать мно-

[1]) Рѣчь, произнесенная 5-го Мая 1896 г. передъ диспутомъ.

гіе вопросы статики, занимавшіе умы ученыхъ 16 и 17 столѣтій. Голландскій ученый и инженеръ Стевинъ помощью наклонной плоскости открываетъ извѣстный законъ параллелограмма силъ, ставшій впослѣдствіи въ рукахъ Ньютона и Вариньона однимъ изъ основныхъ законовъ современной намъ механики. Правда Стевинъ обнаружилъ законъ параллелограмма только для того случая, когда направленія силъ взаимно перпендикулярны. Но вскорѣ французскій ученый Роберваль доказалъ справедливость его для силъ, дѣйствующихъ подъ какимъ угодно угломъ и при доказательствѣ воспользовался снова принципомъ рычага. Я напомню затѣмъ, что въ концѣ прошлаго столѣтія знаменитый Лагранжъ пользуется свойствами блоковъ, чтобы доказать основной принципъ современной статики—принципъ возможныхъ перемѣщеній. Я напомню, наконецъ, что для доказательства того же принципа Коши прибѣгаетъ къ законамъ равновѣсія рычага. Такимъ образомъ равноплечій рычагъ, наклонная плоскость и блоки въ рукахъ математиковъ и физиковъ имѣли значеніе не только механизмовъ, назначенныхъ для передвиженія и поднятія тяжестей и выполненія другихъ практическихъ цѣлей, но сдѣлались орудіями болѣе деликатными—орудіями научнаго мышленія и пріобрѣли характеръ научныхъ пріемовъ и методовъ для рѣшенія различныхъ вопросовъ механики.

Все возрастающая сложность задачъ, подлежащихъ рѣшенію механики, не позволяетъ, однако, ограничиться въ наше время употребленіемъ вышеупомянутыхъ простыхъ машинъ и требуетъ болѣе сложныхъ и могущественныхъ методовъ, и какъ таковые наше столѣтіе выдвинуло на первый планъ двѣ другія простыя машины, а именно веревку, или, точнѣе, веревочный многоугольникъ и винтъ. Веревочный многоугольникъ, какъ методъ, имѣетъ главнымъ образомъ значеніе въ такъ называемой графической статикѣ, которая

занимается вопросами строительной техники — вопросами о постройкѣ большихъ желѣзнодорожныхъ мостовъ, стропильныхъ фермъ, выставочныхъ зданій, поражающихъ насъ легкостью архитектуры и своими громадными размѣрами и т. п. Значеніе веревочнаго многоугольника для графической статики прекрасно характеризуется словами инженера Ейфеля, строителя знаменитой башни, который сказалъ, что онъ никогда не могъ бы построить своей башни, если бы не учился графической статикѣ въ Цюрихѣ. Другая изъ упомянутыхъ мною простыхъ машинъ, винтъ, какъ методъ, имѣетъ значеніе въ вопросахъ теоретической механики, а именно въ статикѣ, кинематикѣ и динамикѣ твердаго тѣла. Этотъ методъ былъ введенъ въ механику англійскимъ астрономомъ и математикомъ Ball'емъ въ началѣ 70 годовъ нашего столѣтія. Хотя методомъ винта мы владѣемъ, такимъ образомъ, всего 25 лѣтъ, и теперь уже можно считать доказаннымъ, что онъ является весьма подходящимъ для механики твердаго тѣла, позволяя многіе вопросы этой науки рѣшать съ замѣчательною простотою и изяществомъ. Нужно впрочемъ замѣтить, что многочисленными мемуарами Ball'я методъ винта еще далеко нельзя считать окончательно разработаннымъ. Между тѣмъ не подлежитъ никакому сомнѣнію, что его значеніе будетъ обнаруживаться все болѣе и болѣе по мѣрѣ нашего съ нимъ знакомства и притомъ не только для динамики твердаго тѣла, но и въ другихъ отдѣлахъ механики. Эта увѣренность отчасти и руководила мной, когда я поставилъ себѣ задачей детально изслѣдовать нѣкоторыя геометрическія построенія теоріи винтовъ, о которыхъ я и намѣренъ сказать теперь нѣсколько словъ.

Ball научилъ насъ складывать винты и производить съ ними еще нѣсколько построеній аналогичныхъ операціи умноженія. Приведенный своими собственными изслѣдованіями—о нихъ я скажу далѣе—къ построенію изъ двухъ данныхъ винтовъ третьяго, играющаго по отношенію къ даннымъ роль произведенія, я былъ наведенъ на вопросъ, не существуетъ ли еще и другихъ построеній, которыя можно было бы считать умноженіемъ винтовъ и каковъ самый общій видъ такихъ построеній. Прежде чѣмъ рѣшать этотъ вопросъ, нужно было, однако, выяснить какія построенія считать умноженіемъ винтовъ и какихъ типовъ они могутъ быть. Съ этою цѣлью надо было обратиться къ другимъ уже обработаннымъ отдѣламъ математики и посмотрѣть, нельзя ли среди нихъ найти такой, въ которомъ можно было бы ожидать аналогій съ операціями надъ винтами. За такими аналогіями весьма естественно было обратиться къ построеніямъ надъ векторами и къ комплекснымъ числамъ съ ними связаннымъ — квартерніонамъ, весьма естественно говорю я потому, что уже операція сложенія и вычитанія винтовъ представляла много сходства съ операціями сложенія и вычитанія векторовъ. Такимъ образомъ я поставилъ себѣ задачу найти такія операціи надъ винтами, которыя были бы аналогичны съ операціями умноженія различныхъ типовъ надъ векторами. Рѣшеніе этого вопроса привело меня къ тѣмъ комплекснымъ числамъ, которые уже раньше были введены въ науку англійскимъ математикомъ Clifford'омъ и были названы имъ бикватерніонами [1]).

По мѣрѣ того какъ я вникалъ въ сущность этихъ чиселъ, мнѣ все болѣе и болѣе выяснялись два свойства ихъ, свойства, которымъ я придаю весьма важное значеніе. Во-первыхъ оказалось, что достаточно прибѣгнуть къ небольшой уловкѣ, чтобы теорію бикватерніоновъ сдѣлать вполнѣ аналогичной, и даже болѣе, вполнѣ тожественной съ теоріей кватерніоновъ, что достаточно ввести понятіе о функціяхъ комплексныхъ чиселъ вида $a+\omega b$, гдѣ ω есть символъ, обладающій свойствомъ $\omega^2=0$, чтобы всѣ формулы теоріи кватерніоновъ можно было бы считать и формулами теоріи бикватерніоновъ. Во вторыхъ выяснилось, что различнымъ операціямъ надъ бикватерніонами соотвѣтствуютъ различнаго рода болѣе или менѣе цѣнныя для насъ построенія теоріи винтовъ, и что обратно важнымъ для насъ построеніямъ теоріи винтовъ отвѣчаютъ различныя операціи надъ бикватерніонами. Чтобы объяснить, почему я придаю этимъ результатамъ такое важное значеніе, я позволю себѣ прибѣгнуть къ слѣдующему сравненію. Предъ Вами два инструмента. Одинъ инструментъ старый, давно Вамъ знакомый: Вы знаете, что, производя съ нимъ такія то и такія то манипуляціи, Вы достигнете такихъ то и такихъ то результатовъ. Другой инструментъ новый и повидимому болѣе сложный; но изслѣдовавъ его внимательно, Вы замѣчаете, что всѣ тѣ манипуляціи, которыя Вы продѣлывали со старымъ инструментомъ, Вы можете продѣлывать и съ инструментомъ новымъ. Однако новый инструментъ, какъ болѣе сложный, даетъ и разультаты болѣе сложные и болѣе для Васъ цѣнные, чѣмъ результаты употребленія стараго инструмента. Этотъ новый инструментъ пріобрѣтаетъ такимъ образомъ для Васъ двойное значеніе. Для Васъ важно и то, что съ нимъ можно обращаться совершенно также, какъ и съ старымъ инструментомъ, важно потому, что Вы не должны тратить времени, чтобы научиться владѣть новымъ инструментомъ, но владѣя инструментомъ старымъ Вы владѣете и инструментомъ новымъ. Для Васъ важно и то, что новый инструментъ даетъ и новые результаты. Такимъ образомъ, поступая съ новымъ инструментомъ совершенно также, какъ раньше Вы поступали съ инструментомъ старымъ, Вы безъ всякаго съ Вашей стороны труда достигаете новыхъ болѣе сложныхъ и цѣнныхъ

[1]) См. мою работу «Винтовое счисленіе», Уч. Зап. Каз. Унив., Сент. и Ноябрь 1895, Янв. и Февр. 1896 г.

для васъ результатовъ. Въ такомъ же отношеніи, какъ эти два воображаемыхъ инструмента находятся между собой векторъ и кватерніонъ съ одной стороны, винтъ и бикватерніонъ съ другой. Всѣ тѣ операціи, которыя мы совершаемъ надъ кватерніонами, можно совершать надъ бикватерніонами, всѣ формулы теоріи кватерніоновъ, можно разсматривать какъ формулы теоріи бикватерніоновъ, словомъ владѣя теоріей кватерніоновъ Вы уже владѣете и теоріей бикватерніоновъ. Но геометрическій смыслъ операцій надъ кватерніонами и бикватерніонами различенъ. Операціямъ надъ кватерніонами соотвѣтствуютъ построенія теоріи векторовъ, имѣющихъ общее начало, операціямъ надъ бикватерніонами—построенія теоріи винтовъ. Такимъ образомъ, благодаря бикватерніонамъ, между построеніями и теоремами теоріи векторовъ и построеніями и теоремами теоріи винтовъ можно провести полнѣйшій параллелизмъ, такъ что каждому построенію и теоремѣ теоріи векторовъ будетъ отвѣчать построеніе и теорема теоріи винтовъ; между тѣмъ какъ формулы, выражающія соотвѣтствующія теоремы, будутъ однѣ и тѣже, только одинъ разъ мы должны считать ихъ формулами теоріи кватерніоновъ, а въ другой—формулами теоріи бикватерніовъ. Это соотвѣтствіе позволяетъ, пользуясь извѣстными теоремами, находить новыя и такимъ образомъ можетъ служить научнымъ методомъ, которому я и даю названіе метода перенесенія и отвожу въ своей работѣ значительную часть, главы II и III первой части и главу I— второй.

Я перехожу теперь къ другому пункту своей работы, которому я придаю также важное значеніе, а именно къ вопросамъ, составляющимъ содержаніе послѣдней главы. Въ первой половинѣ моей работы я занимаюсь комплексными числами и геометрическими построеніями съ ними связанными, въ послѣдней же главѣ дѣло идетъ о нѣкоторыхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ и интегралахъ уравненій механики, которые я называю винтовыми интегралами и которые представляютъ обобщеніе извѣстныхъ интеграловъ площадей и движенія центра тяжести. Поэтому на первый взглядъ можетъ показаться, что между послѣдней главой и остальною частью моей работы нѣтъ никакого отношенія. Въ дѣйствительности это однако не такъ: между обѣими частями есть тѣсная связь и связующимъ звеномъ служитъ такъ называемая группа евклидовыхъ движеній. Въ самомъ дѣлѣ Poincaré и Study показали, что каждой системѣ комплексныхъ чиселъ, удовлетворяющихъ извѣстнымъ условіямъ, отвѣчаетъ нѣкоторая группа преобразованій, и обратно каждой группѣ преобразованій нѣкоторыхъ типовъ соотвѣтствуетъ опредѣленная система комплексныхъ чиселъ. Такими то комплексными числами, отвѣчающими группѣ движеній, и служатъ бикватерніоны. Это можно обнаружить или такъ, какъ это и дѣлаетъ Г. Study [1]), показавъ, что умноженіе бикватерніоновъ соотвѣтствуетъ сложенію конечныхъ винтовыхъ перемѣщеній твердаго тѣла, или такъ, какъ это сдѣлалъ я, доказавъ, что операція векторнаго умноженія винтовъ отвѣчаетъ аналитической операціи составленія скобокъ Jacobi, операціи, которая играетъ въ теоріи группъ выдающуюся роль. Итакъ группа движеній пространства связана съ бикватерніонами, съ другой стороны таже группа связана съ винтовыми интегралами. Дѣйствительно, извѣстная теорема Poisson'a, по которой изъ двухъ интеграловъ механики можно составить третій, весьма естественно приводитъ къ понятію о группѣ интеграловъ. Такъ называютъ такую совокупность интеграловъ, что комбинація какихъ либо двухъ изъ нихъ помощью скобокъ Poisson'a не даетъ новаго интеграла, но даетъ или тожество, или интегралъ зависимый отъ

[1]) «Von Bewegungen und Umlegungen» Math. Annalen, B. XXXIX, 1891

интеграловъ данной совокупности. При изученіи такихъ группъ винтовыхъ интеграловъ и обнаруживается связь ихъ съ группой движеній, связь, которую можно формулировать слѣдующей теоремой: каждой группѣ движеній отвѣчаетъ група интеграловъ и обратно каждой группѣ интеграловъ отвѣчаетъ група движеній. Я придаю этой теоремѣ важное значеніе не только потому, что она устанавливаетъ зависимость между групой движеній пространства и винтовыми интегралами, но еще и потому, что она, вопервыхъ, въ сжатой формѣ резюмируетъ много частныхъ случаевъ, съ которыми мы встрѣчаемся при изученіи винтовыхъ интеграловъ и, вовторыхъ, она приложима не только къ евклидову пространству, но и къ пространствамъ неевклидовымъ, на что я и указываю въ пятомъ изъ своихъ положеній, причемъ, конечно, мы должны разсматривать группы движеній соотвѣтствующихъ пространствъ. Итакъ группа движеній связана съ одной стороны съ бикватерніонами, а другой съ винтовыми интегралами и мою работу можно разсматривать, если угодно, какъ работу посвященную этой группѣ и вопросамъ съ нею связаннымъ.

Я долженъ впрочемъ замѣтить, что связь между бикватерніонами и винтовыми интегралами можно обнаружить и другимъ болѣе непосредственнымъ путемъ. Дѣйствительно, если мы изъ двухъ винтовыхъ интеграловъ, отвѣчающихъ двумъ даннымъ винтамъ, назовемъ ихъ α и β помощью скобокъ Poisson'a составимъ третій, то винтъ этого послѣдняго, будетъ какъ разъ векторнымъ произведеніемъ винтовъ α и β данныхъ интеграловъ. Это обстоятельство и позволяетъ намъ воспользоваться бикватерніонами для изслѣдованія свойствъ винтовыхъ интеграловъ и ихъ группъ, что и сдѣлано въ моей работѣ.

Только что упомянутая мной теорема, устанавливающая зависимость между умноженіемъ винтовъ и операціей скобокъ

Poisson'a, лично для меня представляетъ особый интересъ, такъ какъ она послужила зерномъ, изъ котораго выросла вся моя работа. Примѣняя къ винтовымъ интеграламъ операцію скобокъ Poisson'a, я пришелъ къ нѣкоторому геометрическому построенію изъ двухъ винтовъ третьяго. Пытаясь затѣмъ проще и изящнѣе доказать свойства винтовыхъ интеграловъ, я подмѣтилъ, что винтъ, который даютъ скобки Poisson'a, носитъ характеръ произведенія. Тогда я припомнилъ, что уже Ball разсматривалъ нѣкоторыя построенія, которыя также можно считать умноженіемъ и у меня возникъ вопросъ, о которомъ я упоминалъ уже выше и который привелъ меня къ бикватерніонамъ. Такимъ образомъ мои идеи возникли и развились самостоятельно и независимо отъ Clifford'a, Study, H. Cox, и Buchheim'a, занимавшихся теоріей бикватерніоновъ, о существованіи работъ которыхъ я узналъ уже тогда, когда моя работа въ главныхъ чертахъ была закончена. Я увидѣлъ тогда, что нѣкоторые мои результаты, были получены уже раньше; я не думаю, однако, чтобы вслѣдствіе этого моя работа совершенно пропала даромъ. Дѣло въ томъ, что Clifford, который первый ввелъ въ науку параболическій и эллиптическій бикватерніоны, не развилъ съ достаточною полнотою своихъ идей. Онъ посвятилъ теоріи бикватерніоновъ только нѣсколько небольшихъ замѣтокъ [1]), которыя носятъ лишь характеръ предварительныхъ сообщеній. Другіе математики, занимавшіеся теоріей бикватерніоновъ, преслѣдовали различныя цѣли. H. Cox [2]), не развивая идей Clifford'a, дополняетъ ихъ, показывая, что бикватерніонъ, который разсматривалъ Hamilton, на-

---

1) «Preliminary Setch of Biquaternions», «Further Note on Biquaternions» «Notes on Biquaternions» «On the Theory of Screws in a space of Constant Positive Curvature», Papers.

2) «On the Application of Quaternions and Grassmanns Ausdehnungslehre to the different kinds of Uniform Space» Trans. of. Cambr. P. S., XIII, 1883.

ходится въ такомъ же отношеніи къ пространству Лобачевскаго, въ какомъ бикватерніоны, введенные Clifford'омъ,—къ пространствамъ эллиптическому и параболическому. Study [1]) интересуется бикватерніонами съ точки зрѣнія теоріи группъ и показываетъ, что группой, отвѣчающей параболическому бикватерніону, является группа движеній евклидова пространства. Единственный математикъ, который ставитъ себѣ цѣлью развить теорію чиселъ Clifford'a, былъ Buchheim. Но его работа [2]) носитъ исключительно аналитическій характеръ. Онъ не ставитъ себѣ въ обязанность проводить соотвѣтствіе между своими формулами и геометрическими построеніями и не задается вопросомъ о геометрическихъ построеніяхъ, отвѣчающихъ операціямъ надъ бикватерніонами. Тѣ геометрическія приложенія, которые онъ даетъ въ своемъ мемуарѣ, нужно разсматривать скорѣе какъ приложенія теоріи кватерніоновъ, а не бикватерніоновъ. Пренебрегая такимъ образомъ связью бикватерніоновъ съ геометріею, Buchheim, по моему мнѣнію, дѣлаетъ большую ошибку, благодаря которой, какъ мнѣ кажется, отъ его вниманія ускользаетъ какъ связь бикватерніоновъ съ группами движеній, такъ и методъ перенесенія, который однимъ почеркомъ пера позволяетъ теорію бикватерніоновъ всѣхъ типовъ свести къ теоріи кватерніоновъ. Итакъ только одинъ г. Buchheim поставилъ себѣ задачу сходную съ той, которую имѣлъ въ виду и я, однако пріемы къ которымъ онъ прибѣгаетъ для ея рѣшенія и результаты, имъ получаемые, отличны отъ моихъ.

На сколько я успѣлъ достигнуть поставленной себѣ цѣли судить не мнѣ. Но если мнѣ удастся своей работой обратить вниманіе русскихъ математиковъ на идеи Clifford'a, то я буду считать себя вполнѣ удовлетвореннымъ. Тѣмъ болѣе, что это будетъ съ моей стороны лишь небольшой услугой памяти Clifford'a, за ту большую услугу, которую онъ оказалъ славѣ родного мнѣ Казанскаго университета тѣмъ, что своими работами по неевклидовой геометріи значительно способствовалъ популяризаціи имени нашего славнаго геометра Н. И. Лобачевскаго.

[1]) l. c.

[2]) «A memoir on Biquaternions». Am. Journal, VII, 1885.

А. Котельниковъ.