О ДАВЛЕНІИ

ЖИДКОЙ СТРУИ НА КЛИНЪ.

А. КОТЕЛЬНИКОВА.

КАЗАНЬ.
Типографія Императорскаго Университета
1889.

Печатано по опредѣленію Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Казанскомъ университетѣ.

Президентъ *А. Штукенбергъ.*

О ДАВЛЕНІИ

ЖИДКОЙ СТРУИ НА КЛИНЪ.

Сообщеніе **А. П. Котельникова,**

читанное 16-го Сент. 1889 г. въ 90-мъ засѣданіи физико-математической секціи Общ. Естеств. при Казанск. Университетѣ.

Мы будемъ говорить о движеніи жидкости, происходящемъ съ потенціаломъ скоростей параллельно плоскости. Проведя на одной изъ тѣхъ плоскостей, въ которыхъ происходитъ движеніе, оси ox и oy прямолинейной прямоугольной системы координатъ и называя черезъ x и y координаты какой либо частицы жидкости, лежащей на этой плоскости, мы будемъ изслѣдовать движеніе жидкости только въ плостости xoy ибо тожественно съ движеніемъ въ этой плоскости будетъ происходить движеніе и во всѣхъ плоскостяхъ параллельныхъ съ нею.

Всякій разъ, когда движеніе жидкости происходитъ параллельно плоскости съ потенціаломъ скоростей, существуетъ функція комплексной перемѣнной $z=x+iy$ (назовемъ ее w) обладающая слѣдующими свойствами *).

1. Если мы представимъ w въ видѣ $\varphi+i\psi$, гдѣ φ и ψ суть вещественныя функціи перемѣнныхъ x и y, то φ будетъ потенціаломъ скоростей разсматриваемаго движенія, а ψ— функціей тока. Такимъ образомъ ур. вида $\psi=const.$ будетъ ур. линіи тока, а разность значеній функціи ψ въ двухъ

*) Подробнѣе см. Kirchhoff. Vorlesungen über Mathematische Physik. Vorlesungen 21 и 22. Также Lamb. A treatise on the mathematical theory of the motion of fluids.

точкахъ B и A $\psi_B - \psi_A$ представитъ объемъ жидкости протекающей въ единицу времени черезъ цилиндрическую поверхность, имѣющую основаніемъ линію AB, и высота которой равна 1, причемъ считается направленіе линіи AB отъ A къ B и объемъ жидкости, протекающій слѣва линіи AB на право положительнымъ, а протекающій справа на лѣво—отрицательнымъ.

2. По свойству производной отъ обратной функціи, мы имѣемъ:

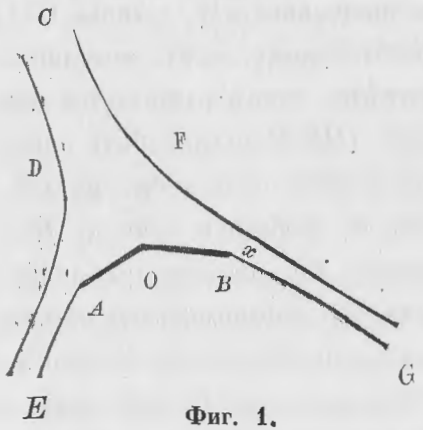
$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\frac{dw}{dz}} = \frac{1}{\frac{d\varphi}{dx} - i\frac{d\varphi}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2}}\left(\frac{\frac{d\varphi}{dx} + i\frac{d\varphi}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2}}\right) =$$

$$= \zeta = \xi + i\eta \qquad (1).$$

Вообразимъ плоскость ζ параллельную плоскости xoy, проведемъ въ этой плоскости прямолинейную прямоугольную систету координатъ $\xi o \eta$, оси которой соотвѣтственно параллельны осямъ ox и oy и будемъ комплексное перемѣнное ζ изображать точкой на плоскости ζ. Всякой точкѣ плоскости xoy будетъ соотвѣтствовать точка въ плоскости ζ и, какъ показываетъ равенство (1), радіусъ векторъ этой точки будетъ параллеленъ скорости частицы (x,y) v и будетъ равенъ $\frac{1}{v}$; такъ что точкѣ, скорость которой равна 0, будетъ въ плоскости ζ соотвѣтствовать точка безконечно удаленная, точкѣ же, скорость которой $= \infty$—начало координатъ.

Такимъ образомъ мы будемъ разсматривать три комплексныя переменныя z, w, ζ. Каждую изъ этихъ перемѣнныхъ мы будемъ представлять точкою на плоскости, перемѣнную z на плоскости z (плоскость xoy), перемѣнную ζ—на плоскости ζ, перемѣную w—на плоскости w. Всѣ три плоскости представилъ себѣ параллельными и проведемъ на нихъ оси xoy, $\xi o \eta$, $\varphi o \psi$, также соотвѣтственно параллельныя. Такъ какъ каждыя двѣ изъ переменныхъ z, ζ и w могутъ быть разсматриваемы какъ функціи 3-ей перемѣнной, то каждой точкѣ въ одной изъ плоскостей будетъ соотвѣтствовать по крайней мѣрѣ по одной точкѣ въ двухъ другихъ плоскостяхъ и области, въ которой мѣняется одна изъ перемѣнныхъ будутъ соотвѣтствовать области другихъ двухъ перемѣнныхъ, внутри которыхъ эти перемѣнныя будутъ измѣнятся.

§ 1. Пусть область перемѣнной z занята струей жидкости CO, которая идетъ изъ безконечности, и, встрѣчая клинъ AOB, разрѣзается имъ на двѣ струи DE и FG. Взявъ начало системы координатъ xoy въ вершинѣ клина и направивъ ось x по одной изъ его сторонъ, назовемъ $p\pi$ уголъ клина $p\theta$, $p\alpha_1$, $p\alpha_2$ углы образуемые съ осью x направленіями струй OC, ED, FG въ безконечности. Обозначимъ черезъ $2b$ ширину потока на безконечномъ разстояніи отъ начала координатъ до встрѣчи его съ клиномъ и черезъ v_0 общую скорость его частицъ въ безконечности; тогда объемъ жидкости, протекающей въ единицу времени черезъ поперечное сѣченіе струи $= 2bv_0$ (предполагая, что вышина струи $= 1$.)



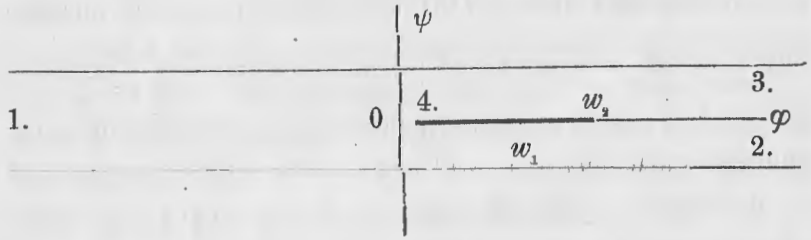
Фиг. 1.

Допустимъ, что на жидкость не дѣйствуютъ силы и что разсматриваемое движеніе есть установившееся движеніе съ потенціаломъ скоростей. Предположимъ кромѣ того, что объемы жидкости, протекающей черезъ поперечныя сѣченія струй DE и FG, равны и что на свободныхъ границахъ струи, т. е. на протяженіи линій CDE, CFG, AE и BG давленіе постоянно.

Посмотримъ какова должна быть область w, соотвѣтствующая области z занятой движущейся жидкостью. Линія CDE есть линія тока, слѣдовательно на ней вездѣ функція ψ будетъ имѣть одно и тоже значеніе, которое мы можемъ сдѣлать $= -bv_0$, прибавляя къ функціи ψ нѣкоторую постоянную. Но извѣстно, что потенціальная функція постоянно и неопредѣлено возрастаетъ, если мы идемъ по линіи тока въ ту сторону, куда течетъ жидкость и убываетъ въ противномъ случаѣ. Поэтому функція φ въ точкѣ C должна быть $= -\infty$, а въ $E = +\infty$ и линіи CDE должна соотвѣтствовать вся прямая $\psi = -bv_0$ въ плоскости w. Линія CFG есть также линія тока, на ней ψ также будетъ равняться постоянной величинѣ и, такъ какъ объемъ протекающій между CD и $CF = 2bv_0$, эта постоянная $= bv_0$. Линіи CFG въ плоскости w будетъ соотвѣтствовать, слѣд., вся линія $\psi = bv_0$. Такъ какъ струя, встрѣчая клинъ разбивается имъ на двѣ части, то внутри струи $CDOF$ должна быть линія тока, развѣтвляющаяся при встрѣчѣ съ клиномъ на двѣ, изъ которыхъ одна переходитъ въ свободную границу BG, а другая — въ свободную границу AE; назовемъ эту линію тока раздѣляющей линіей тока. По предположенію объемы жидкости протекающей черезъ поперечныя сѣченія струй AE и FG одинаковы, а потому для раздѣляющей линіи тока ψ должно имѣть значеніе среднее между $\psi = -bv_0$ и $\psi = +bv_0$, т. е. $\psi = O$ и слѣдовательно въ плоскости w ей соотвѣтствуетъ

прямая—ось φ. Той части линіи тока, которая составляетъ границы струи будетъ соотвѣтствовать часть оси φ отъ нѣкотораго значенія φ, которое мы можемъ сдѣлать равнымъ нулю, придавъ къ функціи φ нѣкоторую постоянную и до $\varphi = +\infty$

Ниже мы покажемъ, что точка развѣтвленія должна находиться въ вершинѣ клина, слѣд. начало координатъ въ плоскости z будетъ изображаться началомъ координатъ плоскости w. Такимъ образомъ мы нашли границы области перемѣнной w.



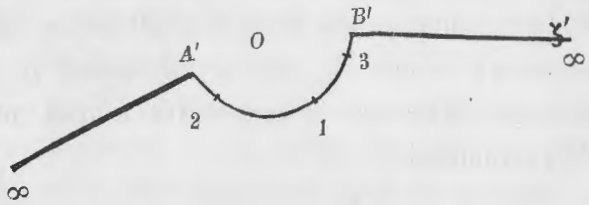
Фиг. 2.

Разсмотримъ, какова должна быть область комплексной перемѣнной ζ, соотвѣтствующая области струи. Для этого замѣтимъ, что, при установившемся движеніи жидкости съ потенціаломъ скоростей, между давленіемъ p_1 въ какой либо точкѣ жидкости и скоростью v этой точки существуетъ соотношеніе

$$\frac{p_1}{\varrho} = C - \frac{1}{2}v^2 \qquad (2)$$

гдѣ C есть величина постоянная, а ϱ—плотность жидкости. Это ур. показываетъ, что скорость частицъ, лежащихъ на свободной границѣ, вездѣ будетъ одинакова, такъ какъ, по преположенію, и давленіе на этихъ границахъ постоянно. Вспомнивъ теперь, что радіусъ векторъ точки ζ, соотвѣт-

ствующей какой либо точкѣ $z = x + iy$ плоскости z, параллелен скорости v и равенъ $\frac{1}{v}$, мы заключаемъ, что часть границы области ζ, соотвѣтствующая свободнымъ границамъ области z должна быть дугой круга радіуса $\frac{1}{v_0}$. Безконечно далекой точкѣ струи—C будетъ соотвѣтствовать точка $\zeta = \frac{1}{v_0}(cs\,p\,\theta - i\,sin\,p\,\theta)$ (1), а линіи CDE дуга круга, начиная отъ точки (1) до $\zeta = \frac{1}{v_0}(cs\,p\alpha_2 - isin\,p\alpha_2)$ (2). Часть границы, отвѣчающая кривой CFG, должна быть дугой того же круга между точками (1) и (3), для которой $\zeta = \frac{1}{v_0} cs(p\alpha_1 - isin\,p\alpha_1)$. Далѣе, свободная граница EA, начинаясь отъ безконечно удаленной точки E и кончаясь точкой A, должна въ плоскости ζ преобразоваться въ дугу круга отъ точки (2) до дочки A', отъ которой начинается граница, отвѣчающая щекѣ клина OA. Наконецъ свободной границѣ GB должна соотвѣтствовать дуга начиная отъ точки (3) и кончая точкой B', изображающей точку B.



Фиг. 3.

Чтобы найти границы, отвѣчающія сторонамъ клина—OA и OB, надо опредѣлить положеніе точки развѣтвленія раздѣляющей линіи тока. Если клинъ обращенъ выпуклостью къ струѣ, т. е. $p\pi < \pi$, то искомая точка не можетъ находиться на какой либо щекѣ клина, ибо въ такомъ случаѣ раздѣляющая линія тока при продолженіи должна была бы

обогнуть ребро клина; но тогда согласно предположенію Helmholtz'a *) отъ ребра должна была бы начаться поверхность прерыва, мы же предполагаемъ, что вездѣ внутри струи скорость измѣняется непрерывно. Итакъ въ случаѣ выпуклаго клина точка развѣтвленія раздѣляющей линіи тока должна находиться въ вершинѣ клина. Допустимъ, что это будетъ справедливо и для вогнутаго клина. Такимъ образомъ вдоль всей щеки OA скорости точекъ имѣютъ одно направленіе и слѣд. въ плоскости ζ грани OA должна соотвѣтствовать прямая OA' параллельная OA. Скорость частицъ, прилегающихъ къ щекѣ OB, также имѣютъ одно и тоже направленіе, а потому щекѣ OB должна отвѣчать прямая линія OB'. Такъ какъ линіи OA' и OB' должны замкнуть область ζ, то границами ζ будутъ или отрѣзки OA' и OB' или отрѣзки $A'\infty$ и $B'\infty$. Но въ первомъ случаѣ на границѣ находилось бы начало координатъ чего не можетъ быть, такъ какъ началу координатъ въ плоскости z соотвѣтствуетъ точка, скорость которой безконечно велика. Такимъ образомъ область перемѣнной ζ должна имѣть видъ данный на чертежѣ (3). Точка встрѣчи линій OA' и OB' $\zeta = \infty$ должна соотвѣтствовать точкѣ встрѣчи линій OA и OB, т. е. началу координатъ плоскости z.

Итакъ области комплексныхъ перемѣнныхъ z, ζ, w должны имѣть видъ указанный на чертежахъ (1), (2) и (3) и слѣдующія точки этихъ областей должны быть соотвѣтствующими:

---

*) Helmholtz. «Ueber discontinuirliche Flussigkeits bewegungen». Monatsberichte der Königl. Academie der Wissenschaften zu Berlin. 1868.

Безк. удал. точкѣ C соотв. въ пл. W $\varphi=-\infty$ (1)
— — — E — — $\varphi=+\infty, \psi<o$ (2)
— — — G — — $\varphi=+\infty, \psi>o$ (3)
— — — O — — $\varphi=o, \psi=o$ (4)

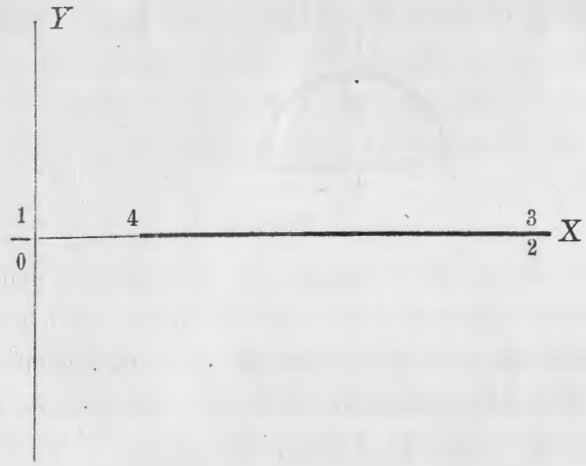
и въ плоскости $\zeta=\frac{1}{v_0}(cs\, p\theta - i\sin p\theta)$ (1)
— — $\zeta=\frac{1}{v_0}(cs p\alpha_2 - i\sin p\alpha_2)$ (2)
— — $\zeta=\frac{1}{v_0}(cs p\alpha_1 - i\sin p\alpha_1)$ (3)
— — $\zeta=\infty$ (4)

(3)

§ 2. Чтобы найти зависимость двухъ изъ перемѣнныхъ z, ζ и w отъ третьей, достаточно, какъ это видно изъ ур. (1), найти выраженіе одной изъ нихъ въ функціи другой. Такъ какъ области ζ и w имѣютъ наиболѣе простой видъ, то мы и будемъ искать соотношеніе между этими перемѣнными.

(a). Для этого положимъ $Z=e^{\frac{\pi w}{2bv_0}}$. Весьма простыми разсужденіями можно убѣдиться, что линія $\psi=-bv_0$ илоскости w преобразуется въ плоскости Z въ отрицательную часть оси Y, линія $\psi=+bv_0$—въ положительную часть оси Y и наконецъ линія $o\varphi$—въ линію 4-X, такъ что области w будетъ соотвѣтствовать часть плоскости Z вправо отъ оси Y, раздѣленная линіей 4-X (черт. 4).

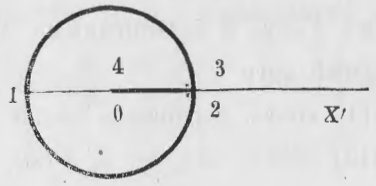
Точкѣ $\varphi=-\infty$ (1) соотв. въ плос. Z точка $X=o$, $Y=o$ (1)
— $\varphi=+\infty, \psi<o$ (2) — — — — $X=\infty, Y<o$ (2)
— $\varphi=+\infty, \psi>o$ (3) — — — — $X=\infty, Y>o$ (3)
— $\varphi=o$, $\psi=o$ (4) — — — — $X=1$, $Y=o$ (4)



Фиг. 4.

(b) Введемъ перемѣнную Z', полагая $Z'=\frac{Z-1}{Z+1}$. Ось Y плоскости Z преобразуется въ окружность радіуса $=1$, описанную около начала координатъ, а прямая 4-X—въ радіусъ 023, такъ что область Z' соотвѣтствующая области Z будетъ ограничена окружностью и радіусомъ 023 (черт. 5)

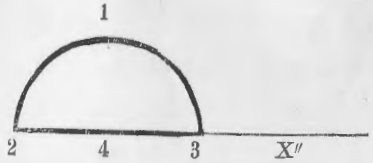
Точ. $Z=o$ (1) буд. соотв. въ пл. Z' точ. $Z'=-1$ (1)
— $Z=1$ (4) — — — — $Z'=o$ (4)
— $X=\infty, Y<o$ (2) — — — — $X'=1, Y'=-o$ (2)
— $X=\infty, Y>o$ (3) — — — — $X'=1, Y'=+o$ (3)



Фиг. 5.

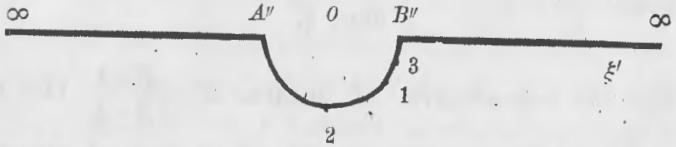
(c) Далѣе положимъ $Z''=\sqrt{Z'}$. Въ области перемѣнной Z' функція Z'' будетъ оставаться однозначной и, если мы для $Z'=-1$ возьмемъ $Z''=+i$, то для всякаго значенія Z' въ

указанной области Z'' будетъ имѣть одно опредѣленное



Фиг. 6.

значеніе. Окружность радіуса $=1$, описанная около начала координатъ плоскости Z', преобразуется въ плоскости Z'' въ полуокружность 312, прямая линія 023 плоскости Z'— въ прямую 243 плоскости Z'', такъ что область Z'' будетъ полукругомъ радіуса $=1$ (черт. 6).



Фиг. 7.

Точ. $Z'=-1$ (1) соотв. въ пл. Z'' точка $Z''=+i$ (1)
— $X'=1, Y'=-o$ (2) — — — — $Z''=-1$ (2)
— $X'=1, Y'=+o$ (3) — — — — $Z''=+1$ (3)
— $Z'=o$ (4) — — — — $Z''=o$ (4)

(d) Найдемъ перемѣнную ζ'—функцію Z'', такъ чтобы область ζ' лежала бы ниже оси ξ' и была бы ограничена полуокружностью (213), описанной около начала координатъ радіусомъ равнымъ 1—ѣ, и безконечными прямыми $A''\infty$ и $B''\infty$ и чтобы кромѣ того

$$\left.\begin{array}{llll} \text{точкамъ } Z''=+i\,(1) & \text{соотв. бы точки} & \zeta'+cs\theta-isin\theta & (1) \\ \text{—} \quad Z''=-1\,(2) & \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} & \zeta'=cs\alpha_2-isin\alpha_2 & (2) \\ \text{—} \quad Z''=+1\,(3) & \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} & \zeta'=cs\alpha_1-isin\alpha_1 & (3) \\ \text{—} \quad Z''=o\,(4) & \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} & \zeta'=\infty & (4) \end{array}\right\}(4)$$

Очевидно, что область ζ' можетъ быть разсматриваема, какъ луночка съ углами $\frac{\pi}{2}$ при вершинахъ, одна изъ дугъ

которой имѣетъ безконечно удаленный центръ; подобную же луночку представляетъ область Z'', и потому на основаніи теоремъ доказанныхъ Kirchhoff'омъ въ его Vorlesungen между ζ' и Z'' будетъ существовать соотношеніе

$$\left(\frac{Z''-1}{Z''+1}\right)^2=N\frac{\left(\frac{\zeta'-1}{\zeta'+1}\right)^2+A}{\left(\frac{\zeta'-1}{\zeta'+1}\right)+B} \qquad (d)$$

гдѣ коэффиціенты N, A, B должны быть опредѣлены сообразно условіямъ (4). По этимъ условіямъ при $Z''=1$ мы должны имѣть $\zeta'=cs\alpha_1-isin\alpha_1$, слѣд.

$$\left(\frac{cs\alpha_1-isin\alpha_1-1}{cs\alpha_1-isin\alpha_1+1}\right)^2+A=0, \text{ откуда} \qquad A=tang^2\frac{\alpha_1}{2}$$

Далѣе, при $Z''=-1$, $\zeta'=cs\alpha_2-isin\alpha_2$, слѣд.

$$\left(\frac{cs\alpha_1-isin\alpha_1-1}{cs\alpha_1-isin\alpha_1+1}\right)^2+B=0, \text{ откуда} \qquad B=tang^2\frac{\alpha_2}{2}$$

Наконецъ 3-й коэффиціентъ опредѣляется условіемъ, по которому при $Z''=0$—$\zeta'=\infty$; имѣемъ

$$1=N\frac{1+tang^2\frac{\alpha_1}{2}}{1+tang^2\frac{\alpha_1}{2}}, \text{ откуда} \qquad N=\frac{cs^2\frac{\alpha_1}{2}}{cs^2\frac{\alpha_1}{2}}$$

Такимъ образомъ ур. (d) принимаетъ видъ:

$$\left(\frac{Z''-1}{Z''+1}\right)^2=\frac{cs^2\frac{\alpha_1}{2}}{cs^2\frac{\alpha_2}{2}}\,\frac{\left(\frac{\zeta'-1}{\zeta'+1}\right)^2+tang^2\frac{\alpha_1}{2}}{\left(\frac{\zeta'-1}{\zeta'+1}\right)^2+tang^2\frac{\alpha_2}{2}} \qquad (d')$$

И такъ мы видимъ, что всѣ 3 коеффиціента ур. (d) опредѣляются по послѣднимъ тремъ изъ условій (4) и намъ не остается средствъ заставить ζ' удовлетворять и первому изъ этихъ условій. Это обстоятельство показываетъ, что для

выполненія перваго условія при взятой зависимости между ζ' и Z'' необходимо, чтобы между углами θ, α_1 и α_2 существовало нѣкоторое соотношеніе, которое можетъ быть найдено такимъ образомъ. Найдемъ значеніе ζ' при $Z''=i$; подставляя $Z''=i$ въ др. (d'), получимъ

$$(-1)=\frac{cs^2\frac{\alpha_1}{2}(\zeta'-1)^2+sin^2\frac{\alpha_1}{2}(\zeta'+1)^2}{cs^2\frac{\alpha_2}{2}(\zeta'-1)^2+sin^2\frac{\alpha_2}{2}(\zeta'+1)^2}$$

$$\zeta'^2-(cs\alpha_1+cs\alpha_2)\zeta'+1=0;\zeta'=\frac{cs\alpha_1+cs\alpha_2}{2}\pm i\sqrt{\frac{4-(cs\alpha_1+cs\alpha_2)}{4}}$$

откуда видно, что первое изъ условій (3) будетъ выполнено только въ томъ случаѣ, когда

$$cs\theta=\frac{cs\alpha_1+cs\alpha_2}{2} \qquad (5)$$

Это равенство показываетъ, что уголъ θ заключается между α_1 и α_2—пусть $\alpha_1<\theta<\alpha_0$.

(e). Наконецъ положимъ $\zeta=\frac{1}{v_0}\zeta'^p$ и покажемъ, что выражая ζ при помощи ур. (a), (b), (c) и (d') въ функціи w, мы и получимъ искомую функцію, удовлетворяющую всѣмъ вышепоставленнымъ условіямъ. Въ самомъ дѣлѣ, если положимъ ζ=положительной величинѣ при ζ' положительномъ, то область ζ будетъ имѣть видъ указанный на чертежѣ (3): она будетъ ограничена прямыми, наклоненными подъ угломъ $p\pi$, и дугою круга радіуса $\frac{1}{v_0}$. Далѣе,

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{точ. } cs\theta-isin\theta\,(1) & \text{пл. } \zeta' \text{ буд. соотв. въ пл. } \zeta & \text{точ. } \frac{1}{v_0}(csp\theta-isinp\theta)\,(1) \\
-cs\alpha_2-isin\alpha_2\,(2) & \text{— — — —} & -\frac{1}{v_0}(csp\alpha_2-isinp\alpha_2)\,(2) \\
-cs\alpha_1-isin\alpha_1\,(3) & \text{— — — —} & -\frac{1}{v_0}(csp\alpha_1-isinp\alpha_1\,(3) \\
\infty \quad (4) & & \infty \quad (4)
\end{array}\right\}(6)$$

Но рядъ чертежей (2), (4), (5), (6) и (7) (на нихъ цифрами 1, 2, 3, 4 обозначены соотвѣтствующія точки) наглядно показываютъ, что точкамъ, 1, 2, 3, 4 области w соотвѣтствуютъ точки 1, 2, 3, 4 области ζ', а потому ζ будетъ удовлетворять и условіямъ (3). Наконецъ, замѣчая, что при $p<2$ ζ есть однозначная функція ζ' внутри области ζ' и наоборотъ, мы заключаемъ, что ζ и w суть однозначныя функціи одна другой въ областяхъ, указанныхъ на черт. (2) и (3), ибо и рядъ перемѣнныхъ Z, Z', Z'', ζ' суть однозначныя функціи одна другой въ соотвѣтствующихъ областяхъ (черт. 4, 5, 6, 7).

Найдемъ явное выраженіе ζ въ функціи w. Рѣшая ур. (∂) относительно ζ', имѣемъ:

$$\zeta'=\frac{\left(\frac{Z''-1}{Z''+1}\right)^2(1-B)-N(1-A)\pm\sqrt{\left\{\left(\frac{Z''-1}{Z''+1}\right)^2(1-B)-N(1-A)\right\}^2-\left\{\left(\frac{Z''-1}{Z''+1}\right)^2(1+B)-N(1+A)\right\}^2}}{\left(\frac{Z''-1}{Z''+1}\right)^2(1+B)-N(1+A)}$$

Но изъ равенствъ $Z''=\sqrt{Z'}, Z'=\frac{Z-1}{Z+1}, Z=e^{2bv_0}=e^{v'}$, гдѣ $v'=\frac{\pi w}{2bv_0}$, находимъ

$$Z''=\sqrt{\frac{e^{v'}-1}{e^{v'}+1}}$$

Поэтому, подставляя вмѣсто N, A и B ихъ значенія, имѣемъ

$$(1-B)\left(\frac{Z''-1}{Z''+1}\right)^2-N(1-A)=\frac{1}{\frac{cs^2\alpha_2}{2}\left\{\sqrt{e^{v'}-1}+\sqrt{e^{v'}+1}\right\}^2}$$

$$\left\{cs\alpha_2(\sqrt{e^{v'}-1}-\sqrt{e^{v'}+1})^2-cs\alpha_1(\sqrt{e^{v'}-1}+\sqrt{e^{v'}+1})\right\}$$

или, вводя вспомогательный уголъ θ_1 такъ, чтобы

$$cs\theta_1 = \frac{cs\alpha_1 - cs\alpha_2}{2} \qquad (7)$$

и полагая для сокращенія $cs^2\frac{\alpha_2}{2}\left\{\sqrt{e^{v'}-1}+\sqrt{e^{v'}+1}\right\}^2 = s$,

$$(1-B)\left(\frac{Z''-1}{Z''+1}\right)^2 - N(1-A) = -\frac{4}{s}\left\{cs\theta_1 e^{v'} + cs\theta\sqrt{e^{2v'}-1}\right\}$$

Далѣе, $(1+B)\left(\frac{Z''-1}{Z''+1}\right)^2 - N(1+A) = -\frac{4}{s}\sqrt{e^{2v'}-1}$

Наконецъ $\left\{(1-B)\left(\frac{Z''-1}{Z''+1}\right)^2 - N(1-A)\right\}^2 - \left\{(1+B)\left(\frac{Z''-1}{Z''+1}\right)^2 - N(1+A)\right\}^2 = \frac{16}{s^2}\left\{e^{2v'}(cs^2\theta_1 - sin^2\theta) + 2sin\theta cs\theta_1\sqrt{e^{2v'}-1}\text{-}sin^2\theta\right\}$

На основаніи этихъ равенстъ ζ' получаетъ видъ:

$$\zeta' = cs\theta + \frac{e^{v'}cs\theta_1}{\sqrt{e^{2v'}-1}} \pm \sqrt{\left(cs\theta + \frac{e^{v'}cs\theta_1}{\sqrt{e^{2v'}-1}}\right)^2 - 1}$$

или, полагая $2v' = 2\frac{\pi w}{b2v_0} = \frac{\pi w}{bv_0} = v$, (8)

$$\zeta' = cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-v}}} \pm \sqrt{\left(cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-v}}}\right)^2 - 1} \qquad (9)$$

и слѣд. $\zeta = \frac{1}{v_0}\left[cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-v}}} \pm \sqrt{\left(cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-v}}}\right)^2 - 1}\right]^p$ *) (10)

ζ' есть однозначная функція w въ указанной выше области, а потому достаточно опредѣлить знаки корней входящихъ въ выраженіе ζ' въ какой нибудь точкѣ, чтобы знать знаки этихъ корней и повсюду внутри области w. При $\varphi > o$ и $\psi = o\sqrt{1-e^{-v}}$ остается вещественнымъ, и, если бы онъ былъ $< o$, то при $\varphi = +\infty$ сдѣлался бы равнымъ -1, и $\zeta' =$

*) При $p=1$ и $cs\,\theta = o$ это ур. обращается въ ур, данное Kirchnoff'омъ «Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahen». Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 70. 1869.

$= cs\,\theta - cs\,\theta_1 \pm \sqrt{(cs\,\theta - cs\,\theta_1)^2 - 1}$ или на основаніи равенствъ (5) и (7) $\zeta' = cs\alpha_2 - isin\alpha_2$. Такъ какъ это значеніе по условіямъ (3) и (6) ζ' имѣетъ при $\varphi = +\infty$ и $\psi = -o$, то заключаемъ, что при $\varphi = +\infty$ и $\psi = -o\sqrt{1-e^{-v}}$ имѣетъ значеніе отрицательное, а слѣд. и вдоль всей линіи $\varphi > o$, $\psi = -o$ онъ остается отрицательнымъ. Если же при $\varphi > o$ и $\psi = o\sqrt{1-e^{-r}} > o$, то при $\varphi = +\infty$ онъ обращается въ $+1$ и мы получаемъ $\zeta' = cs\,\theta + cs\,\theta_1 \pm \sqrt{(cs\,\theta + cs\,\theta_1)^2 - 1}$, или по равенствамъ (5) и (7) $\zeta' = cs\alpha_1 - isin\alpha_1$. Это значеніе ζ' на основаніи (3) и (6) соотвѣтствуетъ $\varphi = +\infty$ и $\psi = +o$, а потому при $\varphi > o$ и $\psi = +o\sqrt{1-e^{-v}} > o$. Что касается знаковъ корня $\sqrt{\left(cs\,\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-v}}}\right)^2 - 1}$, то они опредѣляются условіемъ, по которому при $\varphi = o$ и $\psi = o$ $\zeta' = \infty$. Сопоставляя это условіе со знакомъ $\sqrt{1-e^{-v}}$ увидимъ, что при φ достаточно маломъ и $> o$ и $\psi = -o$ $\sqrt{\left(cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-v}}}\right)^2 - 1}$ долженъ быть вещественнымъ и $< o$, а при φ достаточно маломъ и $> o$ и $\psi = +o$ $\sqrt{\left(cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-v}}}\right)^2 - 1}$ долженъ быть тоже вещественнымъ но $> o$. Найденными знаками корней $\sqrt{1-e^{-v}}$, $\sqrt{\left(cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-v}}}\right)^2 - 1}$ на линіи $\psi = o$ вблизи начала координатъ опредѣляются знаки ихъ и во всей области w.

Чтобы изслѣдовать, какъ измѣняются знаки корней, входящихъ въ ζ' вдоль линій $\psi = -o$ и $\varphi > o$; $\psi = +o$ и $\varphi > o$; $\psi = -bv_0$ и $-\infty < \varphi < +\infty$; $\psi = +bv_0$ и $-\infty < \varphi < +\infty$ и гдѣ они остаются вещественными, надо обратить вниманіе на особенныя точки плоскости w, т. е. точки, въ которыхъ два значенія корней входящихъ въ ζ' дѣлаются равными.

Такихъ особенныхъ точекъ въ плоскости $w-3$.

$$(11)\begin{cases} 1)\ \text{точ. } w_0 = o = v_0, \text{ гдѣ } \sqrt{1-e^{-\nu}} \text{ обращается въ нуль} \\ 2)\ \text{—}\quad w_1 = \frac{bv_0}{\pi} v_1, \text{ гдѣ } v_1 \text{ опредѣл.} \\ \text{изъ ур. } cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu_1}}} = 1 \\ 3)\ \text{—}\quad w_2 = \frac{bv_0}{\pi} v_2, \text{ гдѣ } v_2 \text{ опредѣл.} \\ \text{изъ ур. } cs\theta - \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu_2}}} = -1 \end{cases} \text{въ которыхъ } \sqrt{\left(cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}}\right)^2 - 1} \text{ обращается въ нуль.}$$

Изъ послѣднихъ двухъ ур. находимъ:

$$e^{-\nu_1} = 1 - \frac{cs^2\theta_1}{(1-cs\theta)^2} = \frac{1-cs\alpha_1)(1-cs\alpha_2)}{(1-cs\theta)^2}$$
$$e^{-\nu_2} = 1 - \frac{cs^2\theta_1}{(1+cs\theta)^2} = \frac{(1+cs\alpha_1)(1+cs\alpha_2)}{(1+cs\theta)^2} \qquad (12)$$

откуда видно, что v_1 и v_2 вещественныя положительныя величины и $v_1 > v_2$, такъ что $w_1 > w_2$ и точки w_1 и w_2 лежатъ на оси $o\varphi$ (черт. 2). Не входя въ подробности изслѣдованій корней, выпишемъ результаты этихъ изслѣдованій.

При

$$\psi = -bv_0 \qquad \zeta' = cs\theta - \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}} - i\sqrt{1-\left(cs\theta - \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}}\right)^2}$$

$$\psi = +bv_0 \qquad \zeta' = cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}} - i\sqrt{1-\left(cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}}\right)^2}$$

При (13)

$$w < w_1 \text{ и } \psi = +o\ \zeta' = cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}} + \sqrt{\left(cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}}\right)^2 - 1}$$

$$w > w_1 \text{ и } \psi = +o\ \zeta' = cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}} - i\sqrt{1-\left(cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}}\right)^2}$$

$$w < w_2 \text{ и } \psi = -o\ \zeta' = cs\theta - \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}} - \sqrt{\left(cs\theta - \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}}\right)^2 - 1}$$

$$w > w_2 \text{ и } \psi = -o\ \zeta' = cs\theta - \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}} - i\sqrt{1-\left(cs\theta - \frac{cs\theta_4}{\sqrt{1-e^{-\nu}}}\right)^2}$$

§ 3. Зная ζ въ функціи w, легко выразить и z черезъ w. Въ самомъ дѣлѣ, замѣчая, что при $w=o$ и $z=o$, на основаніи ур. (11) имѣемъ:

$$z = \int_0^w \zeta dw$$

Такъ какъ начало координатъ плоскости z находится въ вершинѣ клина, то длины щекъ OB и OA, назовемъ ихъ l_1 и l_2, будутъ модулями чиселъ z_1 и z_2, которыя изображаются точками A и B; поэтому, называя w_1', w_2' значенія w, соотвѣтствующія значеніямъ z_1 и z_2 и точкамъ B и A, имѣемъ

$$l_1 = мод\ z_1 = мод \int_0^{w_1'} \zeta dw \qquad (14)$$

$$l_2 = мод\ z_2 = мод \int_0^{w_2'} \zeta dw \qquad (15)$$

Чтобы найти значенія w_1' и w_2' замѣтимъ, что точкамъ A и B соотвѣтствуютъ въ плоскости ζ точки A' и B', а въ плоскости ζ'—точки A'' и B''; слѣд. w_1' и w_2' суть такія точки на границѣ области w, при которыхъ ζ' изъ вещественнаго дѣлается мнимымъ. Таблица (13) показываетъ намъ, что такой переходъ имѣетъ мѣсто при w_1 и w_2, слѣд. $w_1' = w_1 = \varphi_1$ и $w_2' = w_2 = \varphi_2$. При опредѣленіи интеграловъ (14) и (15), мы возьмемъ за пути интегрированія линіи ow_1 и ow_2.

Такъ какъ на первой линіи ζ' имѣетъ значеніе;

$$\zeta' = cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}} + \sqrt{\left(cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}}\right)^2 - 1}$$

и на второй $\zeta' = cs\theta - \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}} - \sqrt{\left(cs\theta - \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}}\right)^2 - 1}$

и такъ какъ вдоль линій ow_1 и ow_2 $\psi = o$ и слѣд. $dw = d\varphi$, то интегралы (14) и (15) принимаютъ видъ

$$l_1 = мод\frac{1}{v_0}\int_0^{\varphi_1}\left[cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}} + \sqrt{\left(cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}}\right)^2 - 1}\,\right]^p d\varphi$$

$$l_2 = мод(-1)^p\frac{1}{v_0}\int_0^{\varphi_2}\left[-cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}} + \sqrt{\left(cs\theta - \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}}\right)^2 - 1}\,\right]^p d\varphi$$

или, принимая во вниманіе, что подъинтегральныя функціи вещественны и положительны въ предѣлахъ интегрированія, имѣемъ

$$l_1 = \frac{1}{v_0}\int_0^{\varphi_1}\left[cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}} + \sqrt{\left(cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}}\right)^2 - 1}\,\right]^p d\varphi$$

$$l_2 = \frac{1}{v_0}\int_0^{\varphi_2}\left[-cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}} + \sqrt{\left(cs\theta - \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}}\right)^2 - 1}\,\right]^p d\varphi.$$

а вводя въ эти интегралы перемѣнную $\nu = \frac{\pi w}{bv_0} = \frac{\pi\varphi}{bv_0}$, находимъ

$$l_1 = \frac{b}{\pi}\int_0^{v_1}\left[cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}} + \sqrt{\left(cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}}\right)^2 - 1}\,\right]^p d\nu \quad (16)$$

$$l_2 = \frac{b}{\pi}\int_0^{v_2}\left[-cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}} + \sqrt{\left(cs\theta - \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}}\right)^2 - 1}\,\right]^p d\nu. \quad (17)$$

гдѣ v_1 и v_2 опредѣляются по ур. (11) и (12). Преобразуемъ эти интегралы къ новымъ перемѣннымъ; вводя въ первый изъ нихъ перемѣнное u, опредѣляемое изъ ур.

$$cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}} + \sqrt{\left(cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}}\right)^2 - 1} = \frac{1}{u} \quad (18)$$

имѣемъ

$$cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}} - \sqrt{\left(cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}}\right)^2 - 1} = u;$$

складывая эти уравненія, находимъ

$$cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}} = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)$$

$$1 - e^{-\nu} = \frac{4u^2cs^2\theta_1}{(u^2 - 2ucs\theta + 1)^2}$$

отсюда

$$e^{-\nu} = \frac{(u^2 - 2ucs\alpha_1 + 1)(u^2 - 2ucs\alpha_2 + 1)}{(u^2 - 2ucs\theta + 1)^2}$$

$$d\nu = \frac{8cs^2\theta_1 u(1-u^2)du}{(u^2 - 2ucs\alpha_1 + 1)(u^2 - 2ucs\theta + 1)(u^2 - 2ucs\alpha_2 + 1)}$$

и, такъ какъ значенія новаго перемѣннаго, отвѣчающія границамъ перемѣннаго u суть o и 1, то

$$l_1 = \frac{8bcs^2\theta_1}{\pi}\int_0^1 \frac{u^{1-p}(1-u^2)du}{(u^2 - 2ucs\alpha_1 + 1)(u^2 - 2ucs\theta + 1)(u^2 - 2ucs\alpha_2 + 1)} \quad (19)$$

Если, далѣе, въ интегралъ (17) введемъ перемѣнное v, опредѣляемое ур.

$$-cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}} + \sqrt{\left(cs\theta - \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}}\right)^2 - 1} = \frac{1}{v}, \quad (20)$$

то границами интегрированія по новому перемѣнному будутъ o и 1, а замѣчая, что

$$-cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}} - \sqrt{\left(cs\theta - \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}}\right)^2 - 1} = v,$$

находимъ

$$-cs\theta + \frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-\nu}}} = \frac{1}{2}\left(v + \frac{1}{v}\right)$$

$$1 - e^{-\nu} = \frac{4cs^2\theta_1 v^2}{(v^2 + 2vcs\theta + 1)^2}$$

$$e^{-\nu} = \frac{(v^2 + 2vcs\alpha_1 + 1)(v^2 + 2vcs\alpha_2 + 1)}{(v^2 + 2vcs\theta + 1)^2}$$

$$d\nu = \frac{8cs^2\theta_1 v(1-v^2)dv}{(v^2 + 2vcs\alpha_1 + 1)(v^2 + 2cs\theta + 1)(v^2 + 2vcs\alpha_2 + 1)}$$

и $$l_2 = \frac{8bcs^2\theta_1}{\pi}\int_0^1 \frac{v^{-p}(1-v^2)dv}{(v^2 + 2vcs\alpha_1 + 1)(v^2 + 2cs\theta + 1)(v^2 + 2vcs\alpha_2 + 1)} \quad (21)$$

Сравнивая интегралы (19) и (21), мы видимъ, что второй получается изъ перваго замѣной θ, α_1 и α_2 черезъ $\pi - \theta$,

$\pi-\alpha_1$, $\pi-\alpha_2$ и потому достаточно найти одинъ изъ нихъ. Очевидно также, что если бы мы имѣли двѣ струи, изъ которыхъ одна характеризовалась бы углами $\theta, \alpha_1, \alpha_2$, а другая $\pi-\theta$, $\pi-\alpha_1$, $\pi-\alpha_2$, то щека l_1 для перваго клина равнялась бы щекѣ l_2 для втораго и наоборотъ. Поэтому достаточно разсмотрѣть только тѣ случаи, когда $\theta<\frac{\pi}{2}$.

Найдемъ, далѣе, выраженія для давленій, которыя испытываютъ щеки клина OB и OA. Назовемъ давленіе на свободной поверхности струи и на внутренней поверхности клина, несмачиваемой движущейся жидкостью, черезъ p_0. Такъ какъ на свободной границѣ жидкой струи давленіе не должно испытывать прерыва, то, на основаніи ур. (2), мы должны имѣть $p_0=c-\frac{\varrho}{2}v_0^2$ и $p_1-p_0=\frac{\varrho}{2}(v_0^2-v^2)$; но $v=\frac{v_0}{мод\xi^{1/p}}$ и потому $p_1-p_0=\frac{\varrho}{2}\left(v_0^2-\frac{v_0^2}{мод\xi^{1/2p}}\right)$. Чтобы найти равнодѣйствующія всѣхъ давленій на щеки OA и OB, разобьемъ поверхность щекъ на элементы, имѣющіе высоту h = высотѣ стѣнокъ клина и основаніе dz—элементъ линіи OA или линіи OB. Каждая такая элементарная полоса будетъ со стороны движущейся жидкости испытывать давленіе $p_1 h$ *мод.* dz, съ противоположной же стороны давленіе $p_0 h$ *мод.* dz. Избытокъ перваго давленія надъ вторымъ будетъ

$$h(p_1-p_0)мод.dz=\frac{h\varrho}{2}v_0^2\left(1-\frac{1}{мод\xi^{1/2p}}\right)мод.dz=$$

$$=\frac{h\varrho v_0^2}{2}мод.\left[\left(1-\frac{1}{\xi^{1/2p}}\right)dz\right]$$

Избытокъ давленія со стороны струи, на всю щеку OB будетъ

$$P_1=\frac{h\varrho v_0^2}{2}мод.\int_0^{w_1}(\xi^{1/p}-\xi^{1-p})dw$$

и на щеку OA $\quad P_2=\frac{h\varrho v_0^2}{2}мод^2 w\int_0(\xi^p-\xi^{1-p})dw$

На основаніи тѣхъ же соображеній, которыя были указаны при полученіи интеграловъ (16) и (17) находимъ

$$P_1=\frac{h\varrho v_0^2 b}{\pi}\int_0^{v_1}\left\{\left[cs\theta+\frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-v}}}+\sqrt{\left(cs\theta+\frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-v}}}\right)^2-1}\right]^p-\right.$$
$$\left.-\left[cs\theta+\frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-v}}}+\sqrt{\left(cs\theta+\frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-v}}}\right)^2-1}\right]^{-p}\right\}dv$$

$$P_2=\frac{h\varrho v_0^2 b}{\pi}\int_0^{v_2}\left\{\left[-cs\theta+\frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-v}}}+\sqrt{\left(cs\theta-\frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-v}}}\right)^2-1}\right]^p-\right.$$
$$\left.-\left[-cs\theta+\frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-v}}}+\sqrt{\left(cs\theta-\frac{cs\theta_1}{\sqrt{1-e^{-v}}}\right)^2-1}\right]^{-p}\right\}dv$$

или, вводя перемѣнныя u и v по ур. (18) и (20)

$$P_1=\frac{4bv_0^2hcs^2\theta_1\varrho}{\pi}\int_0^1\frac{(u^{-p}-u^p)u(1-u^2)du}{(u^2-2ucs\alpha_1+1)(u^2-2ucs\theta+1)(u^2-2ucs\alpha_2+1)}\quad(22)$$

$$P_2=\frac{4bh\varrho v_0^2cs^2\theta_1}{\pi}\int_0^1\frac{(v^{-p}-v^p)v(1-v^2)dv}{(v^2+2vcs\alpha_1+1)(v^2+2vcs\theta+1)(v^2+2vcs\alpha_2+1)}\quad(23)$$

Относительно этихъ интеграловъ можно сдѣлать тѣже замѣчанія, какія были сдѣланы относительно интеграловъ (19) и (21).

§ 4. Разсматривая сначала частный случай $p=1$, иначе говоря случай струи, встрѣчающей пластинку подъ угломъ θ, изъ (19) и (22) получаемъ

$$l_1=\frac{8bcs^2\theta_1}{\pi}\int_0^1\frac{(1-u^2)du}{(u^2-2ucs\alpha_1+1)(u^2-2ucs\theta+1)(u^2-2ucs\alpha_2+1)}\quad(24)$$

$$P_1=\frac{4bh\varrho v_0^2cs^2\theta_1}{\pi}\int_0^1\frac{(1-u^2)^2du}{(u^2-2ucs\alpha_1+1)(u^2-2ucs\theta+1)(u^2-2ucs\alpha_2+1)}\quad(25)$$

Разложивъ подъинтегральную дробь въ первомъ интегралѣ на частныя дроби, мы будемъ имѣть

$$8\int\frac{(1-u^2)du}{(u^2-2ucs\alpha_1+1)(u^2-2ucs\theta+1)(u^2-2ucs\alpha_2+1)}=-2\frac{cs\theta}{T}$$

$$lg(u^2-2ucs\theta+1)-2\frac{cs\alpha_1}{A_1}lg(u^2-2ucs\alpha_1+1)-2\frac{cs\alpha_2}{A_2}lg(u^2-2ucs\alpha_2+1)$$

$$-4\frac{sin\theta}{T}arctg\frac{u-cs\theta}{sin\theta}-4\frac{sin\alpha_1}{A_1}arctg\frac{u-cs\alpha_1}{sin\alpha_1}-4\frac{sin\alpha_2}{A_2}arctg\frac{u-cs\alpha_2}{sin\alpha_2}$$

гдѣ

$$T=(cs\theta-cs\alpha_1)(cs\theta-cs\alpha_2)=-cs^2\theta_1$$
$$A_1=(cs\alpha_1-cs\theta)(cs\alpha_1-cs\alpha_2)=2cs^2\theta_1 \qquad (26)$$
$$A_2=(cs\alpha_2-cs\theta)(cs\alpha_2-cs\alpha_1)=2cs^2\theta_1$$

отсюда

$$8\int_0^1\frac{(1-u^2)du}{(u^2-2ucs\alpha_1+1)(u^2-2ucs\theta+1)(u^2-2ucs\alpha_2+1)}=$$
$$-4\frac{cs\theta}{T}lg2sin\frac{\theta}{2}-4\frac{cs\alpha_1}{A_1}lg2sin\frac{\alpha_1}{2}-4\frac{cs\alpha_2}{A_2}lg2sin\frac{\alpha_2}{2}$$
$$-4\frac{sin\theta}{T}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)-4\frac{sin\alpha_1}{A_1}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha_1}{2}\right)-4\frac{sin\alpha_2}{A_2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha_2}{2}\right)$$

и слѣд., на основаніи ур. (26),

$$l_1=\frac{2b}{\pi}\left\{2cs\theta lgsin\frac{\theta}{2}-cs\alpha_1lgsin\frac{\alpha_1}{2}-cs\alpha_2lgsin\frac{\alpha_2}{2}+\right.$$
$$\left.+2sin\theta\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)-sin\alpha_1\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha_1}{2}\right)-sin\alpha_2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha_2}{2}\right)\right\} \qquad (27)$$

Замѣняя во второй части θ, α_1 и α_2 черезъ $\pi-\theta$, $\pi-\alpha_1$, $\pi-\alpha_2$, найдемъ

$$l_2=-\frac{2b}{\pi}\left\{2cs\theta lgcs\frac{\theta}{2}-cs\alpha_1lgcs\frac{\alpha_1}{2}-cs\alpha_2lgcs\frac{\alpha_2}{2}-\right.$$
$$\left.-2sin\theta.\frac{\theta}{2}+sin\alpha_1.\frac{\alpha_1}{2}+sin\alpha_2.\frac{\alpha_2}{2}\right\} \qquad (28)$$

Найдемъ, далѣе, величину P_1. Разлагая подъинтегральную дробь (25), получаемъ:

$$\int\frac{(1-u^2)^2du}{(u^2-2ucs\alpha_1+1)(u^2-2ucs\theta+1)(u^2-2ucs\alpha_2+1)}=$$
$$-\frac{sin\theta}{T}arctg\frac{u-cs\theta}{sin\theta}-\frac{sin\alpha_1}{A_1}arctg\frac{u-cs\alpha_1}{sin\alpha_1}-\frac{sin\alpha_2}{A_2}arctg\frac{u-cs\alpha_2}{sin\alpha_2}$$

$$\int_0^1\frac{(1-u^2)^2du}{(u^2-2ucs\alpha_1+1)(u^2-2ucs\theta+1)(u^2-2ucs\alpha_2+1)}=$$
$$-\frac{sin\theta}{T}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)-\frac{sin\alpha_1}{A_1}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha_1}{2}\right)-\frac{sin\alpha_2}{A_2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha_2}{2}\right)$$

гдѣ T, A_1 и A_2 имѣютъ прежнія значенія. Отсюда по формуламъ (26)

$$P_1=\frac{2bh\varrho v_0^2}{\pi}\left\{2sin\theta\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)-sin\alpha_1\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha_1}{2}\right)-sin\alpha_2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha_2}{2}\right)\right\} \qquad (29)$$

а замѣняя θ, α_1, α_2 черезъ $\pi-\theta$, $\pi-\alpha_1$, $\pi-\alpha_2$,

$$P_2=\frac{2bh\varrho v_0^2}{\pi}\left\{2sin\theta.\frac{\theta}{2}-sin\alpha_1.\frac{\alpha_1}{2}-sin\alpha_2.\frac{\alpha_2}{2}\right\} \qquad (30)$$

Складывая ур. (27) съ (28) и (29) съ (30) и называя длину всей пластинки черезъ l, а давленіе на нее черезъ P, получаемъ

$$l=l_1+l_2=\frac{2b}{\pi}\left\{2cs\theta lgtg\frac{\theta}{2}-cs\alpha_1lgtg\frac{\alpha_1}{2}-cs\alpha_2lgtg\frac{\alpha_2}{2}\right.$$
$$\left.+\frac{\pi}{2}(2sin\theta-sin\alpha_1-sin\alpha_2)\right\} \qquad (31)$$

$$P=P_1+P_2=2bh\varrho v_0^2\left\{2sin\theta-sin\alpha_1-sin\alpha_2\right\} \qquad (32)$$

Прежде чѣмъ изслѣдовать ур. (27), (28), (29), (30), (31) и (32) примѣнимъ ихъ къ тому частному случаю, когда струя направлена перпендикулярно къ пластинкѣ. Такъ какъ въ этомъ случаѣ $\theta=\frac{\pi}{2}$, то по формулѣ (5) будемъ имѣть

$$cs\alpha_2=-cs\alpha_1;\ \alpha_2=\pi-\alpha_1 \qquad (A)$$

и слѣд.

$$2cs\theta lgsin\frac{\theta}{2}-cs\alpha_1lgsin\frac{\alpha_1}{2}-cs\alpha_2lgsin\frac{\alpha_2}{2}=-cs\alpha_1lgtg\frac{\alpha_1}{2}$$

$$2cs\theta lgcs\frac{\theta}{2}-cs\alpha_1lgcs\frac{\alpha_1}{2}-cs\alpha_2lgcs\frac{\alpha_2}{2}=-cs\alpha_2lgtg\frac{\alpha_2}{2}$$

$$2sin\theta.\frac{\theta}{2}-sin\alpha_1.\frac{\alpha_1}{2}-sin\alpha_2.\frac{\alpha_2}{2}=\frac{\pi}{2}(1-sin\alpha_1)$$

$$2sin\theta\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)-sin\alpha_1\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha_1}{2}\right)-sin\alpha_2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha_1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}(1-sin\alpha)$$

такъ что ур. (27), (28), (29), (30), (31) и (32) принимаютъ видъ

$$l_1 = -\frac{2b}{\pi}\left\{cs\alpha_1 lgtg\frac{\alpha_1}{2} - \frac{\pi}{2}(1 - sin\alpha_1)\right\} = l_2 \qquad (33)$$

$$l_2 = \frac{2b}{\pi}\left\{cs\alpha_1 lgctg\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\pi}{2}(1 - sin\alpha_1)\right\} = l_1 \qquad (34)$$

$$P_1 = bh\varrho v_0^2(1 - sin\alpha_1) = P_2 \qquad (35)$$

$$P_2 = bh\varrho v_0^2(1 - sin\alpha_1) = P_1 \qquad (36)$$

$$l = l_1 + l_2 = -\frac{4b}{\pi}\left\{cs\alpha_1 lgtg\frac{\alpha_1}{2} - \frac{\pi}{2}(1 - sin\alpha_1)\right\} \qquad (37)$$

$$P = P_1 + P_2 = 2bh\varrho v_0^2(1 - sin\alpha_1) = 4bh\varrho v_0^2 sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_1}{2}\right) \qquad (38)$$

Ур. (33) и (34) показываютъ, что точка развѣтвленія раздѣляющей линіи тока будетъ находиться посрединѣ пластинки. Сопоставляя этотъ результатъ съ ур. (*A*) и ур. (35) и (36), мы приходимъ къ заключенію, что струи *OE* и *OG* симметричны относительно прямой, проведенной черезъ середину пластинки перпендикулярно къ ней, и давленія на обѣ половинки одинаковы.

Изслѣдуя, далѣе, ур. (37), дающее зависимость между величинами l, $2b$ и α_1, мы видимъ, что множитель стоящій во второй части этого ур. и зависящій отъ α_1, всегда $< O$; будучи равенъ $-\infty$ при $\alpha_1 = O$, онъ уменьшается по абсолютной величинѣ съ возрастаніемъ α_1 и дѣлается равнымъ нулю при $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$. Поэтому, если мы будемъ увеличивать длину пластинки, оставляя ширину струи неизмѣнной, уголъ α_1 будетъ уменьшаться, а уголъ между направленіями струй *OE* и *OG* увеличиваться—эти струи будутъ расходиться все болѣе и болѣе и при $l = \infty$ сдѣлаются перпендикулярными къ первоначальному направленію струи *CO*. Наоборотъ, когда мы будемъ увеличивать ширину струи *CO* отъ *O* до ∞,

оставляя длину пластинки неизмѣнной, α_1 будетъ возрастать отъ *O* до $\frac{\pi}{2}$, т. е. уголъ между направленіями струй *OE* и *OG* въ безконечности будетъ дѣлаться все меньше и меньше и при $b = \infty$ этотъ уголъ будетъ равенъ нулю.

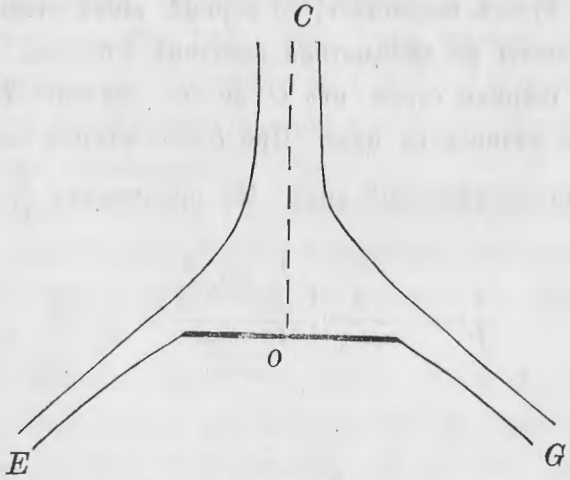


Рис. 8.

Ур. (38) показываетъ, что давленіе струи на пластинку пропорціонально квадрату скорости струи. Коэффиціентъ пропорціональности не остается всегда постояннымъ, но измѣняется въ зависимости отъ ширины струи и длины пластинки. Если мы будемъ считать ширину и скорость струи неизмѣнными, а будемъ измѣнять длину пластинки отъ *O* до ∞, то, какъ мы видѣли, уголъ α_1 будетъ убывать отъ $\frac{\pi}{2}$ до *O* и слѣд. *P* возрастать, начиная отъ нуля и неопредѣленно приближаясь къ $2bh\varrho v_0^2$. Чтобы изслѣдовать зависимость давленія отъ ширины струи, исключимъ b изъ ур. (37) и (38); получимъ:

$$\frac{l}{P} = -\frac{2}{\pi h\varrho v_0^2}\left\{\frac{cs\alpha_1 lgtg\frac{\alpha_1}{2}}{1 - sin\alpha_1} - \frac{\pi}{2}\right\}$$

Мы уже видѣли, что при увеличеніи ширины струи отъ O до ∞ уголъ α_1 возрастаетъ отъ O до $\frac{\pi}{2}$. При $\alpha_1 = O$ отношеніе $\frac{l}{P}$ дѣлается безконечнымъ и слѣд. давленіе $P = O$. Когда α_1 будетъ возрастать, то первый членъ второй части будетъ убывать по абсолютной величинѣ и слѣдов., при возрастаніи ширины струи отъ O до ∞, давленіе P будетъ возрастать начиная съ нуля. При $b = \infty$ вторая часть принимаетъ неопредѣленный видъ. Но представивъ $\frac{l}{P}$ въ видѣ

$$\frac{l}{P} = -\frac{2}{\pi\rho h v_0^2}\left\{\frac{\frac{1}{cs\alpha_1} lgtg\frac{\alpha_1}{2}}{\frac{1-sin\alpha_1}{cs^2\alpha_1}} - \frac{\pi}{2}\right\}$$

легко видѣть, что $lim.\left(\frac{1}{cs\alpha_1} lgtg\frac{\alpha_1}{2}\right) = lim.\left(-\frac{\frac{1}{cs^2\frac{\alpha_1}{2}}}{tg\frac{\alpha_1}{2} sin\alpha_1}\frac{1}{2}\right)$

$$= lim.\left(-\frac{1}{sin^2\alpha_1}\right) = -1$$

и что слѣд. истинное значеніе $\frac{l}{P}$ при $b = \infty$ есть

$$\frac{l}{P} = -\frac{2}{\pi h\rho v_0^2}\left\{-2 - \frac{\pi}{2}\right\} = \frac{\pi+4}{\pi}\frac{1}{h\rho v_0^2}$$

откуда $$P = lh\rho v_0^2 \frac{\pi}{4+\pi} —$$

предѣльное давленіе при безконечно-широкомъ потокѣ. Эта формула была выведена Kirchhoff'омъ *). Если мы построимъ кривую, выражающую зависимость между давленіемъ P и шириной потока $2b$, то увидимъ, что она имѣетъ вначалѣ

*) Kirchhoff. «Vorlesungen über mathematische Physik».

видъ прямой линіи, проходящей черезъ начало координатъ, затѣмъ дѣлаетъ крутой поворотъ и весьма быстро приближается къ прямой параллельной оси b; такъ что давленіе P съ возрастаніемъ ширины струи увеличивается вначалѣ весьма быстро почти пропорціонально $2b$, а потомъ остается почти постояннымъ. Такъ, напр., при ширинѣ струи, превосходящей длину пластинки въ 5 разъ, давленіе P отличается отъ предѣльнаго давленія при $b = \infty$ менѣе чѣмъ на одну сотую послѣдняго.

Не останавливаясь на подробномъ изслѣдованіи ур. (31) и (32), опредѣлимъ давленіе безконечно широкаго потока на пластинку, наклоненную къ направленію потока подъ угломъ θ.

Для этого положимъ, что въ ур. (31) и (32) b неопредѣленно возрастаетъ; такъ какъ при $b = \infty$ длина пластинки остается конечной, то множитель въ ур. (31), стоящій въ скобкахъ, долженъ при $b = \infty$ обращаться въ нуль, что будетъ имѣть мѣсто при $\alpha_1 = \theta = \alpha_2$. Въ этомъ случаѣ обращается въ нуль также множитель стоящій въ выраженіи P (ур. 32), и давленіе на пластинку принимаетъ неопредѣленный видъ $0.\infty$.

Чтобы опредѣлить истинную величину давленія, положимъ, что α_1 и α_2 отличаются на безконечно малыя величины ω_1 и ω_2 отъ θ. Тогда, ограничиваясь безконечно малыми втораго порядка, находимъ

$$cs\alpha_1 = cs\,(\theta+\omega_1) = cs\,\theta - sin\theta\omega_1 - cs\theta\,\frac{\omega_1^2}{1.2}$$

$$cs\alpha_2 = cs\,(\theta+\omega_2) = cs\,\theta - sin\theta\omega_2 - cs\theta\,\frac{\omega_2^2}{1.2}$$

$$sin\alpha_1 = sin(\theta+\omega_1) = sin\theta + cs\theta\omega_1 - sin\theta\,\frac{\omega_1^2}{1.2}$$

$$sin\alpha_2 = siu(\theta+\omega_2) = sin\theta + cs\theta\omega_2 - sin\,\frac{\omega_2^2}{1.2}$$

$$lgtg\frac{\alpha_1}{2}=lgtg\frac{(\theta+\omega_1)}{2}=lgtg\frac{\theta}{2}+\frac{\omega_1}{sin\theta}-\frac{\omega_1^2}{1.2}\frac{cs\theta}{sin^2\theta}$$

$$lgtg\frac{\omega_2}{2}=lgtg\frac{(\theta+\omega_2)}{2}=lgtg\frac{\theta}{2}+\frac{\omega_2}{sin\theta}-\frac{\omega_2^2}{1.2}\frac{cs\theta}{sin^2\theta}$$

и на основаніи первыхъ двухъ разложеній изъ соотношенія (5)

$$sin\theta(\omega_1+\omega_2)+cs\theta\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{1.2}=0$$

откуда

$$\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{1.2}=-tg\theta(\omega_1+\omega_2) \qquad (40)$$

Подставляя, далѣе, въ ур. (31) вмѣсто $cs\alpha_1, cs\alpha_2, sin\alpha_1, sin\alpha_2, lg\,tg\frac{\alpha_1}{2}, lg\,tg\frac{\alpha_2}{2}$ ихъ разложенія и ограничиваясь безконечно малыми втораго порядка, находимъ при помощи ур. (40):

$$l=\frac{(\omega_1+\omega_2)2b}{\pi}\left\{\frac{2}{sin\theta cs\theta}+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{cs\theta}\right\}$$

Подобнымъ же образомъ формула (32) даетъ

$$P=-\frac{(\omega_1+\omega_2)}{cs\theta}bh\varrho v_0^2$$

Такъ какъ длина пластинки и уголъ θ при возрастаніи ширины потока остаются постоянными, то первое изъ этихъ ур. показываетъ, что при возрастаніи b сумма $(\omega_1+\omega_2)$ должна уменьшаться такимъ образомъ, чтобы произведеніе $(\omega_1+\omega_2)$ $2b$ оставалось постояннымъ. Опредѣляя это произведеніе изъ перваго ур. и подставляя во второе, получимъ формулу

$$P=lh\varrho v_0^2\frac{\pi sin\theta}{4+\pi cs\theta},$$

въ которой нетрудно узнать формулу, данную Rayleigh. *)

§ 5. Займемся наконецъ изслѣдованіемъ давленія струи на клинъ. При этомъ изслѣдованіи мы будемъ разсматривать два случая 1) когда $o<p<1$ и 2) когда $1<p<2$ и постоянно будемъ пользоваться формулой

$$\int_0^1\frac{x^{m-1}}{x^{2N}-2x^N cs\vartheta+1}dx=\frac{\pi sin(1-\frac{m}{N})(\pi-\vartheta)}{2Nsin\vartheta sin\frac{m\pi}{N}}+$$

$$+\frac{1}{Nsin\vartheta}\sum_{k=0}^{k=N-1}sin\left[m\frac{\vartheta+2k\pi}{N}-\vartheta\right]lgsin\frac{\vartheta+2k\pi}{2N}$$

или проще, обозначая $\frac{\vartheta+2k\pi}{N}$ черезъ ω,

$$\int_0^1\frac{x^{m-1}}{x^{2N}-2x^N cs\vartheta+1}dx=$$

$$\frac{\pi sin(1-\frac{m}{N})(\pi-\vartheta)}{2Nsin\vartheta sin\frac{m\pi}{N}}+\frac{1}{Nsin\vartheta}\Sigma sin(m\omega-\vartheta)lgsin\frac{\omega}{2} \qquad (41)$$

которая справедлива только при $m<2N$ и неравномъ N и которая легко получается, если разложимъ подъинтегральную дробь на частныя дроби. Въ суммѣ, стоящей во второй части а также во всѣхъ другихъ суммахъ, которыя намъ будутъ встрѣчаться, мы не будемъ означать границъ суммированія, помня, что въ нихъ суммированіе производится по k въ предѣлахъ отъ $k=0$ до $k=N-1$.

Найдемъ сначала интегралъ (19). Такъ какъ

$$\frac{1-u^2}{(u^2-2ucs\alpha_1+1)(u^2-2ucs\theta+1)(u^2-2ucs\alpha_2+1)}=\frac{cs2\theta-ucs\theta}{2T(u^2-2ucs\theta+1)}$$

$$+\frac{cs2\alpha_1-ucs\alpha_1}{2A_1(u^2-2ucs\alpha_1+1)}+\frac{cs2\alpha_2-ucs\alpha_2}{2A_2(u^2-2ucs\alpha_2+1)} \qquad (42)$$

---

*) Lord Rayleigh. «On the Resistance of Fluids». Phil. Mag. Vol. II. 1876.

то интегралъ (19) разлагается на сумму трехъ интеграловъ вида

$$\frac{1}{2T}\int_0^1 \frac{u^{1-p}(cs2\theta-ucs\theta)}{u^2-2ucs\theta+1}du=\frac{cs2\theta}{2T}\int_0^1\frac{u^{1-p}du}{u^2-2ucs\theta+1}$$

$$-\frac{cs\theta}{2T}\int_0^1\frac{u^{2-p}}{u^2-2ucs\theta+1}du=\frac{cs2\theta}{2T}C-\frac{cs\theta}{2T}D \qquad (43)$$

Полагая $p=\frac{K}{N}$ и $u=x^N$, получимъ $du=Nx^{N-1}dx$, $u^{1-p}du=Nx^{2N-K-1}dx$, $u^{2-p}du=Nx^{3N-K-1}dx$ и по формулѣ (41)

$$C=N\int_0^1\frac{x^{2N-K-1}}{x^{2N}-2x^Ncs\theta+1}dx$$

$$=\frac{\pi sin(p-1)(\pi-\theta)}{2sin\theta sin(2-p)\pi}+\frac{1}{sin\theta}\Sigma^\theta sin[(2N-K)\omega-\theta]lgsin\frac{\omega}{2}$$

$$=\frac{\pi sin(1-p)(\pi-\theta)}{2sin\theta sinp\pi}+\frac{1}{sin\theta}\Sigma^\theta sin(K\omega-\theta)lgsin\frac{\omega}{2}$$

гдѣ значекъ θ, поставленный надъ знакомъ Σ, показываетъ, что въ выраженіи ω надо ϑ замѣнить черезъ θ

Если $p<1$, то $N>K$ и $3N-K>2N$; поэтому

$$D=N\int_0^1\frac{x^{3N-K-1}}{x^{2N}-2x^Ncs\theta+1}dx=$$

$$=N\int_0^1 x^{N-K-1}dx+2Ncs\theta\int_0^1\frac{x^{2N-K-1}}{x^{2N}-2x^Ncs\theta+1}dx-$$

$$-N\int_0^1\frac{x^{N-K-1}}{x^{2N}-2x^Ncs\theta+1}dx=\frac{1}{1-p}+2cs\theta C-E,$$

гдѣ C имѣетъ прежнее значеніе, а E по формулѣ (41)

$$E=N\int_0^1\frac{x^{N-K-1}}{x^{2N}-2x^Ncs\theta+1}dx=$$

$$=\frac{\pi sinp(\pi-\theta)}{2sin\theta sin(1-p)\pi}+\frac{1}{sin\theta}\Sigma^\theta sin[(N-K)\omega-\theta]lgsin\frac{\omega}{2}$$

$$=\frac{\pi sinp(\pi-\theta)}{2sin\theta sinp\pi}-\frac{1}{sin\theta}\Sigma^\theta sinK\omega lgsin\frac{\omega}{2}$$

Подставляя выраженіе D черезъ C и E въ ур. (43), получимъ

$$\frac{1}{2T}\int_0^1\frac{u^{1-p}(cs2\theta-ucs\theta)}{u^2-2ucs\theta+1}du=\frac{cs2\theta}{2T}C-\frac{cs\theta}{2T}\left(\frac{1}{1-p}+2cs\theta C-E\right)$$

$$=-\frac{1}{2T}C+\frac{cs\theta}{2T}E-\frac{cs\theta}{2T(1-p)}$$

а замѣняя здѣсь C и E ихъ значеніями, найдемъ

$$\frac{1}{2T}\int_0^1\frac{u^{1-p}(cs2\theta-ucs\theta)}{u^2-2ucs\theta+1}du$$

$$=-\frac{1}{2T}\left\{\frac{\pi sin(1-p)(\pi-\theta)}{2sin\theta sinp\pi}-\frac{1}{sin\theta}\Sigma^\theta sin(K\omega-\theta)lgsin\frac{\omega}{2}\right\}+$$

$$+\frac{cs\theta}{2T}\left\{\frac{\pi sinp(\pi-\theta)}{2sin\theta sinp\pi}-\frac{1}{sin\theta}\Sigma^\theta sinK\omega lgsin\frac{\omega}{2}\right\}-\frac{cs\theta}{2T(1-p)}.$$

$$=-\frac{1}{2T}\left\{\frac{\pi csp(\pi-\theta)}{2sinp\pi}+\Sigma^\theta csK\omega lgsin\frac{\omega}{2}\right\}-\frac{cs\theta}{2T(1-p)} \qquad (44)$$

Два другихъ интеграла, входящихъ въ разложеніе интеграла (19), отличаются отъ (44) только тѣмъ, что въ нихъ вмѣсто T и θ стоятъ соотвѣтственно A_1 и α_1, A_2 и α_2. Поэтому, замѣнивъ въ предъидущемъ ур. T и θ черезъ A_1 и α_1, A_2 и α_2 и складывая полученныя три ур., найдемъ значеніе интеграла (19) и будемъ имѣть

$$l_1=-\frac{4bcs^2\theta_1}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2sinp\pi}\left[\frac{csp(\pi-\theta)}{T}+\frac{csp(\pi-\alpha_1)}{A_1}+\frac{csp(\pi-\alpha_2)}{A_2}\right]+\right.$$

$$+\frac{1}{T}\Sigma^\theta csK\omega lgsin\frac{\omega}{2}+\frac{1}{A_1}\Sigma^{\alpha_1}csK\omega lgsin\frac{\omega}{2}+\frac{1}{A_2}\Sigma^{\alpha_2}csK\omega lgsin\frac{\omega}{2}$$

$$+\frac{1}{1-p}\left(\frac{cs\theta}{T}+\frac{cs\alpha_1}{A_1}+\frac{cs\alpha_2}{A_2}\right)$$

или окончательно, на основаніи ур. (26) и (5),

$$l_1=\frac{2b}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2sinp\pi}\left[2csp(\pi-\theta)-csp(\pi-\alpha_1)-csp(\pi-\alpha_2)\right]+\right.$$

$$\left.+2\Sigma^\theta csK\omega lgsin\frac{\omega}{2}-\Sigma^{\alpha_1}csK\omega lgsin\frac{\omega}{2}-\Sigma^{\alpha_2}csK\omega lgsin\frac{\omega}{2}\right\} \qquad (45)$$

Отсюда, замѣнивъ θ, α_1, α_2 черезъ $\pi-\theta$, $\pi-\alpha_2$, $\pi-\alpha_1$ и обозначивъ выраженіе, въ которое обращается ω при замѣнѣ ϑ черезъ $\pi-\vartheta$ буквой ω', найдемъ

$$l_2=\frac{2b}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2sinp\pi}\left[2csp\theta-cspa_1-cspa_2\right]\right.$$
$$\left.+2\Sigma^{\theta}csK\omega'lgsin\frac{\omega'}{2}-\Sigma^{\alpha_1}csK\omega'lgsin\frac{\omega'}{2}-\Sigma^{\alpha_2}csK\omega'lgsin\frac{\omega'}{2}\right\} \quad (46)$$

Если $p>1$, то $N<K$ и $3N-K<2N$. Въ этомъ случаѣ C будетъ имѣть прежнее значеніе, но

$$D=N\int_0^1\frac{x^{3N-K-1}}{x^{2N}-2x^Ncs\theta+1}dx=$$
$$=\frac{\pi sin(-2+p)(\pi-\theta)}{2sin\theta sin(3-p)\pi}+\frac{1}{sin\theta}\Sigma^{\theta}sin\left[(3N-K)\omega-\theta\right]lgsin\frac{\omega}{2}$$
$$=-\frac{\pi sin(2-p)(\pi-\theta)}{2sin\theta sinp\pi}-\frac{1}{sin\theta}\Sigma^{\theta}sin(K\omega-2\theta)lgsin\frac{\omega}{2}$$

Поэтому ур. (43) приметъ видъ

$$\frac{1}{2T}\int_0^1\frac{u^{1-p}(cs2\theta-ucs\theta)}{u^2-2ucs\theta+1}du=$$
$$=\frac{cs2\theta}{2T}\left\{\frac{\pi sinp(\pi-\theta)}{2sin\theta sinp\pi}-\frac{1}{sin\theta}\Sigma^{\theta}sin(K\omega-\theta)lgsin\frac{\omega}{2}\right\}+$$
$$+\frac{cs\theta}{2T}\left\{\frac{\pi sin(2-p)(\pi-\theta)}{2sin\theta sinp\pi}+\frac{1}{sin\theta}\Sigma^{\theta}sin(K\omega-2\theta)lgsin\frac{\omega}{2}\right\}$$
$$=-\frac{1}{2T}\left\{\frac{\pi csp(\pi-\theta)}{2sinp\pi}+\Sigma^{\theta}csK\omega lgsin\frac{\omega}{2}\right\} \quad (47)$$

Поступая съ этимъ ур. также, какъ раньше мы поступали съ ур. (44), найдемъ

$$l_1=-\frac{4bcs^2\theta_1}{\pi}\left\{\frac{\pi}{sinp\pi}\left[\frac{csp(\pi-\theta)}{T}+\frac{csp(\pi-\alpha_1)}{A_1}+\frac{csp(\pi-\alpha_2)}{A_2}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{T}\Sigma^{\theta}csK\omega lgsin\frac{\omega}{2}+\frac{1}{A_1}\Sigma^{\alpha_1}csK\omega lgsin\frac{\omega}{2}+\frac{1}{A_2}\Sigma^{\alpha_2}csK\omega lgsin\frac{\omega}{2}\right\}$$

Если замѣнимъ T, A_1 и A_2 ихъ значеніями по ур. (26), то получимъ для l_1 прежнее выраженіе (45), такъ что зависимость l_1 и, слѣд., l_2 отъ угловъ θ, α_1, α_2 и ширины потока $2b$ остается одна и таже будетъ ли $p<1$ или $p>1$.

Опредѣлимъ, далѣе, давленія P_1 и P_2 на щеки клина. На основаніи разложенія (42), мы видимъ, что интегралъ (22) приводится къ суммѣ 3-хъ интеграловъ вида

$$\frac{1}{2T}\int_0^1\frac{(u^{-p}-u^p)u(cs2\theta-ucs\theta)}{u^2-2ucs\theta+1}du=\frac{1}{2T}\int_0^1\frac{u^{1-p}(cs2\theta-ucs\theta)}{u^2-2ucs\theta+1}du-$$
$$-\frac{1}{2T}\int_0^1\frac{u^{1+p}(cs2\theta-ucs\theta)}{u^2-2ucs\theta+1}du \quad (48)$$

Первый изъ интеграловъ второй части намъ извѣстенъ (ур. (44) и (45)), второй же разлагается на сумму двухъ

$$\frac{1}{2T}\int_0^1\frac{u^{1+p}(cs2\theta-ucs\theta)}{u^2-2ucs\theta+1}du=\frac{cs2\theta}{2T}\int_0^1\frac{u^{1+p}du}{u^2-2ucs\theta+1}-$$
$$-\frac{cs\theta}{2T}\int_0^1\frac{u^{2+p}du}{u^2-2ucs\theta+1}=\frac{cs2\theta}{2T}F-\frac{cs\theta}{2T}G \quad (49)$$

Пологая въ нихъ, какъ и раньше, $p=\frac{K}{N}$ и $u=x^N$, получимъ $du=Nx^{N-1}dx$, $u^{1+p}=x^{N+K}$, $u^{2+p}=x^{2N+K}$ и

$$F=N\int_0^1\frac{x^{2N+K-1}}{x^{2N}-2x^Ncs\theta+1}dx=$$
$$=N\int_0^1x^{K-1}dx+2Ncs\theta\int_0^1\frac{x^{N+K-1}}{x^{2N}-2x^Ncs\theta+1}dx-$$
$$-N\int_0^2\frac{x^{K-1}}{x^{2N}-2x^Ncs\theta+1}dx=\frac{1}{p}+2cs\theta H-J.$$
$$G=N\int_0^1\frac{x^{3N+K-1}}{x^{2N}-2x^Ncs\theta+1}dx=$$
$$=N\int_0^1(x^{N+K-1}+2x^{K-1}cs\theta)dx+(4cs^2\theta-1)\times$$
$$\times N\int_0^1\frac{x^{N+K-1}}{x^{2N}-2x^Ncs\theta+1}dx-2cs\theta N\int_0^1\frac{x^{K-1}}{x^{2N}-2x^Ncs\theta+1}dx=$$

$$=\frac{1}{1+p}+\frac{2cs\theta}{p}+(4cs^2\theta-1)H-2cs\theta J,$$

такъ что

$$\frac{1}{2T}\int_0^1\frac{u^{1+p}(cs2\theta-ucs\theta)}{u^2-2ucs\theta+1}du=\frac{cs2\theta}{T}\left\{\frac{1}{p}+2cs\theta H-J\right\}-$$

$$-\frac{cs\theta}{2T}\left\{\frac{1}{1+p}+\frac{2cs\theta}{p}+(4cs^2\theta-1)H-2cs\theta J\right\}$$

$$=-\frac{1}{2T}\left\{\frac{1}{p}+\frac{cs\theta}{1+p}\right\}+\frac{1}{2T}\left\{J-cs\theta H\right\} \qquad (50)$$

Но по формулѣ (41)

$$J=N\int_0^1\frac{x^{K-1}}{x^{2N}-2x^N cs\theta+1}dx=\frac{\pi sin(1-p)(\pi-\theta)}{2sin\theta sinp\pi}+$$

$$+\frac{1}{sin\theta}\Sigma^{\theta}sin(K\omega-\theta)lgsin\frac{\omega}{2}$$

и кромѣ того, если $p<1$, $N>K$ и слѣд. $N+K<2N$,

$$H=N\int_0^1\frac{x^{N+K-1}}{x^{2N}-2x^N cs\theta+1}dx=-\frac{\pi sinp(\pi-\theta)}{2sin\theta sinp\pi}+$$

$$+\frac{1}{sin\theta}\Sigma^{\theta}siu[(N+K)\omega-\theta]lgsin\frac{\omega}{2}$$

$$=\frac{\pi sinp(\pi-\theta)}{2sin\theta sinp\pi}+\frac{1}{sin\theta}\Sigma^{\theta}\ sinK\omega lgsin\frac{\omega}{2};$$

а потому

$$\frac{1}{2T}\int_0^1\frac{u^{1+p}(cs2\theta-ucs\theta)}{u^2-2ucs\theta+1}du=-\frac{1}{2T}\left\{\frac{1}{p}+\frac{cs\theta}{1+p}\right\}+$$

$$+\frac{1}{2T}\left\{\frac{\pi sin(1-p)(\pi-\theta)}{2sin\theta sinp\pi}+\frac{1}{siu\theta}\Sigma^{\theta}\ sin(K\omega-\theta)lgsin\frac{\omega}{2}-\right.$$

$$\left.-cs\theta\frac{\pi sinp(\pi-\theta)}{sin\theta sinp\pi}-\frac{cs\theta}{sin\theta}\Sigma^{\theta}\ sinK\omega lgsin\frac{\omega}{2}\right\}$$

$$=-\frac{1}{2T}\left\{\frac{1}{p}+\frac{cs\theta}{1+p}\right\}+\frac{1}{2T}\left\{\frac{\pi csp(\pi-\theta)}{2sinp\pi}-\Sigma^{\theta}csK\omega lgsin\frac{\omega}{2}\right\}$$

Подставляя значеніе этого интеграла и интеграла (44) въ (48), получимъ:

$$\frac{1}{2T}\int_0^1\frac{(u^{-p}-u^p)u(cs2\theta-ucs\theta)}{u^2-2ucs\theta+1}du=-\frac{1}{2T}\left\{\frac{\pi csp(\pi-\theta)}{2sinp\pi}+\right.$$

$$\left.+\Sigma^{\theta}csK\omega lgsin\frac{\omega}{2}\right\}-\frac{cs\theta}{2T(1-p)}+\frac{1}{2T}\left\{\frac{1}{p}+\frac{cs\theta}{1+p}\right\}-$$

$$-\frac{1}{2T}\left\{\frac{\pi csp(\pi-\theta)}{2sinp\pi}-\Sigma^{\theta}csK\omega lgsin\frac{\omega}{2}\right\}$$

$$=-\frac{\pi csp(\pi-\theta)}{2Tsinp\pi}+\frac{1}{2T}\left\{\frac{1}{p}+\frac{cs\theta}{1+p}-\frac{cs\theta}{1-p}\right\} \qquad (51)$$

Если $p>1$, то $N<K$, $N+K>2N$. Въ этомъ случаѣ J имѣетъ прежнее значеніе, но

$$H=N\int_0^1\frac{x^{N+K-1}}{x^{2N}-2x^N cs\theta+1}dx=N\int_0^1 x^{K-N-1}dx+2Ncs\theta\times$$

$$\int_0^1\frac{x^{K-1}}{x^{2N}-2x^N cs\theta+1}dx-N\int_0^1\frac{x^{K-N-1}}{x^{2N}-2x^N cs\theta+1}dx=\frac{1}{p-1}+2cs\theta J-L$$

гдѣ L по формулѣ (41):

$$L=N\int_0^1\frac{x^{K-N-1}}{x^{2N}-2x^N cs\theta+1}dx=\frac{\pi sin(2-p)(\pi-\theta)}{2sin\theta sin(p-1)\pi}+$$

$$+\frac{1}{sin\theta}\Sigma^{\theta}sin[(K-N)\omega-\theta]lgsin\frac{\omega}{2}$$

$$=\frac{\pi sin(2-p)(\pi-\theta)}{2sin\theta sinp\pi}+\frac{1}{sin\theta}\Sigma^{\theta}sin(K\omega-2\theta)lgsin\frac{\omega}{2}$$

Внося выраженіе H черезъ J и L въ ур. (50), получимъ

$$\frac{1}{2T}\int\frac{u^{1+p}(cs2\theta-ucs\theta)}{u^2-2ucs\theta+1}du=-\frac{1}{2T}\left\{\frac{1}{p}+\frac{cs\theta}{1+p}\right\}+\frac{1}{2T}\left\{J-\frac{cs\theta}{p-1}-\right.$$

$$\left.-2cs^2\theta J+cs\theta L\right\}$$

$$=-\frac{1}{2T}\left\{\frac{1}{p}+\frac{cs\theta}{1+p}-\frac{cs\theta}{1-p}\right\}+\frac{1}{2T}\left\{cs\theta L-cs2\theta J\right\},$$

а замѣняя J и L ихъ значеніями, найдемъ:

$$\frac{1}{2T}\int_0^1 \frac{u^{1+p}(cs2\theta-ucs\theta)}{u^2-2ucs\theta+1}du=-\frac{1}{2T}\left\{\frac{\pi sin(2-p)(\pi-\theta)cs\theta}{2sin\theta sinp\pi}+\right.$$

$$+\frac{cs\theta}{sin\theta}\Sigma^{\theta} sin(K\omega-2\theta)lgsin\frac{\omega}{2}-\frac{\pi sin(1-p)(\pi-\theta)cs2\theta}{2sin\theta sinp\pi}-$$

$$\left.-\frac{cs2\theta}{sin\theta}\Sigma^{\theta} sin(K\omega-\theta)lgsin\frac{\omega}{2}\right\}$$

$$-\frac{1}{2T}\left\{\frac{1}{p}+\frac{cs\theta}{1+p}-\frac{cs\theta}{1-p}\right\}=\frac{\pi csp(\pi-\theta)}{2sinp\pi}-\Sigma^{\theta} csK\omega lgsin\frac{\omega}{2}-$$

$$-\frac{1}{2T}\left\{\frac{1}{p}+\frac{cs\theta}{1+p}-\frac{cs\theta}{1-p}\right\}$$

При помощи этого ур. и ур. (47) мы приведемъ ур. (48) снова къ (51), такъ что значеніе интеграла (51) остается однимъ и тѣмъ же будетъ ли $p<1$ или $p>1$. Замѣняя въ нихъ T и θ черезъ A_1 и α_1, A_2 и α_2, мы получимъ и другіе два интеграла, входящіе въ разложеніе интеграла (22) и будемъ имѣть

$$P_1=-\frac{2bh\varrho v_0^2cs^2\theta_1}{\pi}\left\{\frac{\pi csp(\pi-\theta)}{T}+\frac{\pi csp(\pi-\alpha_1)}{A_1}+\frac{\pi csp(\pi-\alpha_2)}{A_2}-\right.$$

$$-\frac{1}{T}\left(\frac{1}{p}+\frac{cs\theta}{1+p}-\frac{cs\theta}{1-p}\right)-\frac{1}{A_1}\left(\frac{1}{p}+\frac{cs\alpha_1}{1+p}-\frac{cs\alpha_1}{1-p}\right)-\frac{1}{A_2}\left(\frac{1}{p}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{cs\alpha_2}{1+p}-\frac{cs\alpha_2}{1-p}\right)\right\},$$

или, подставивъ вмѣсто T, A_1, A_2 ихъ значенія по ур. (26) и пользуясь ур. (5),

$$P_1=\frac{bh\varrho v_0^2}{sinp\pi}\left\{2csp(\pi-\theta)-csp(\pi-\alpha_1)-csp(\pi-\alpha_2)\right\} \qquad (52)$$

Отсюда, замѣнивъ θ, α_1 и α_2 черезъ $\pi-\theta$, $\pi-\alpha_1$, $\pi-\alpha_2$,

$$P_2=\frac{bh\varrho v_0^2}{sinp\pi}\left\{2cspe-csp\alpha_1-csp\alpha_2\right\} \qquad (53)$$

Изъ ур. (52) и (53) можно получить весьма простое выраженіе для проэкціи на первоначальное направленіе струи CO (черт. 1) равнодѣйствующей обоихъ давленій P_1 и P_2. Такъ какъ направленіе давленія P_1 нормально къ щекѣ клина l_1, а струя съ этой щекой образуетъ уголъ $p\theta$, то уголъ между направленіемъ P_1 и направленіемъ струи будетъ $\frac{\pi}{2}-p\theta$ и проэкція давленія P_1 на направленіи струи $=P_1\ sinp\theta$; подобнымъ же образомъ проэкція давленія P_2 на тоже направленіе $=P_2\ sinp(\pi-\theta)$. Сумма этихъ двухъ проэкцій даетъ проэкцію равнодѣйствующей обоихъ давленій, такъ что, называя ее черезъ P_0, мы будемъ имѣть

$$P_0=\frac{bh\varrho v_0^2}{sinp\pi}\left\{2csp(\pi-\theta)sinp\theta-csp(\pi-\alpha_1)sinp\theta-csp(\pi-\alpha)\times\right.$$

$$\times sinp\theta+$$

$$\left.+2sinp(\pi-\theta)csp\theta-sinp(\pi-\alpha_1)csp\theta-sinp(\pi-\alpha_2)csp\theta\right\}$$

$$P_0=bh\varrho v_0^2\left\{1-csp(\theta-\alpha_1)\right\}+bh\varrho v_0^2\left\{1-csp(\theta-\alpha_2)\right\} \qquad (54)$$

$$\text{или } P_0=2bh\varrho v_0^2\left\{sin^2p\frac{\theta-\alpha_1}{2}+sin^2p\frac{\theta-\alpha_2}{2}\right\} \qquad (55)$$

Ур. (54) допускаетъ весьма простое толкованіе. Въ самомъ дѣлѣ, вообразимъ линію тока, проходящую черезъ вершину клина и раздѣляющую струю CO на двѣ части—правую и лѣвую, изъ которыхъ одна—правая образуетъ послѣ встрѣчи съ клиномъ струю FG, а другая—лѣвая—струю DE. Такъ какъ скорости всѣхъ частицъ струи на безконечномъ разстояніи отъ клина $=v_0$ и такъ какъ объемы жидкости протекающей въ одно и тоже время черезъ поперечныя сѣченія струй DE и FG равны, то на безконечномъ разстояніи отъ клина ширина струй DE и FG и частей струи CO будетъ одинакова и равна b.

Поэтому $bh\varrho v_0$ обозначаетъ массу жидкости протекающей въ единицу времени черезъ поперечныя сѣченія каждой изъ частей струи CO и каждой изъ струй DE и FG, а произведеніе $bh\varrho v_0^2$ количество движенія этой массы. Это же произведеніе представляетъ проекцію количества движенія каждой изъ частей струи CO на ея направленіе. Такъ какъ направленія струй DE и FG образуютъ въ безконечности съ направленіемъ струи CO соотвѣтственно углы $p\ (\alpha_2-\theta)$ и $p\ (\theta-\alpha_1)$, то проэкціи количествъ движенія этихъ двухъ струй будутъ $bh\varrho v_0^2 csp(\theta-\alpha_2)$ и $bh\varrho v_0^2 csp(\theta-\alpha_1)$ и потому изъ ур. (54) заключаемъ: проэкція на первоначальное направленіе струи равнодѣйствующей давленій P_1 и P_2 равняется уменьшенію за все время движенія проэкціи на тоже направленіе количества движенія струи.

Когда направленіе струи будетъ дѣлить пополамъ уголъ между сторонами клина, т. е. $p\ \theta=p\frac{\pi}{2}$ или $\theta=\frac{\pi}{2}$, то по соотношенію (5) $\alpha_2=\pi-\alpha_1$ и слѣд. по ур. (45), (46), (52) и (53) $l_1=l_2$, $P_1=P_2$ Такимъ образомъ давленія струи, направленіе которой дѣлитъ пополамъ уголъ между сторонами равнобочнаго клина, на обѣ щеки клина будетъ одинаково. Въ этомъ случаѣ ур. (55) обращается въ

$$P_0=4bh\varrho v_0^2 sin^2 p\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha_1}{2}\right)$$

изъ кокораго при $p=1$ получается ур. (38).

§ 6. Покажемъ въ заключеніе, какимъ образомъ изъ формулъ (45) и (52) вытекаютъ формулы данныя Мещерскимъ *) для давленія на клинъ безконечно широкаго потока. Для этого предположимъ, что ширина струи неопредѣленно возрастаетъ. Такъ какъ $2b$ входитъ въ выраженіе l_1 множителемъ, а при безконечно широкомъ потокѣ—когда $b=\infty$ длина l_1 щеки остается конечной, то другой множитель второй части (45), стоящій въ скобкахъ, долженъ при $b=\infty$ обращаться въ нуль, для чего должно быть $\alpha_1=\theta=\alpha_2$. Въ этомъ случаѣ скобки выраженія P_1 также обращаются въ нуль и P_1 принимаетъ неопредѣленный видъ $o.\infty$. Чтобы найти истинное значеніе l_1 и P_1 положимъ, что b еще не сдѣлалось безконечнымъ и углы α_1 и α_2 не обратились еще въ θ, но отличаются отъ него на безконечно малыя величины ω_1 и ω_2. Тогда, ограничиваясь безконечно малыми втораго порядка, мы будемъ имѣть

$$csp(\pi-\alpha_1)=csp(\pi-\theta-\omega_1)=csp(\pi-\theta)+psin(\pi-\theta)\omega_1-$$
$$-p^2csp(\pi-\theta)\frac{\omega_1^2}{1.2}$$
$$csp(\pi-\alpha_2)=csp(\pi-\theta-\omega_2)=csp(\pi-\theta)+psinp(\pi-\theta)\omega_2-$$
$$-p^2csp(\pi-\theta)\frac{\omega_2^2}{1.2}$$

и на основаніи этихъ разложеній

$$2csp(\pi-\theta)-csp(\pi-\alpha_1)-csp(\pi-\alpha_2)=$$
$$-psinp(\pi-\theta)(\omega_1+\omega_2)+p^2csp(\pi-\theta)\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{1.2}$$

или, замѣняя $\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{1.\ 2.}$ по соотношенію (40),

$$2csp(\pi-\theta)-csp(\pi-\alpha_1)-csp(\pi-\alpha_2)=$$
$$-(\omega_1+\omega_2)p^2csp(\pi-\theta)tg\theta\left\{1+\frac{1}{p}ctg\theta tgp(\pi-\theta)\right\}$$

Слѣд. P_1 принимаетъ видъ

$$P_1=$$
$$-\left[b(\omega_1+\omega_2)\frac{sin^2\theta}{cs\theta}\right]h\varrho v_0^2\frac{\pi p^2csp(\pi-\theta)}{sin^2\theta sinp\pi}\left\{1+\frac{1}{p}ctg\theta tgp(\pi-\theta)\right\}\quad(56)$$

*) Мещерскій. «Къ вопросу о сопротивленіи жидкостей». Журналъ Рус. Физ. Хим. Общества. 1886 годъ.

Далѣе, приведя l_1 къ виду

$$l_1 = \frac{P_1}{h\varrho v_0^2} + \frac{2h}{\pi}\left\{2\Sigma^{\theta} csK\omega lgsin\frac{\omega}{2} - \Sigma^{\alpha_1} csK\omega lgsin\frac{\omega}{2} - \right.$$

$$\left. - \Sigma^{\alpha_2} csK\omega lgsin\frac{\omega}{2}\right\},$$

разложимъ суммы Σ^{α_1} и Σ^{α_2} по степенямъ ω_1 и ω_2, ограничиваясь въ разложеніяхъ только безконечно малыми 2-го порядка; разлагая сначала $cs\ K\omega$, $lgsin\ \frac{\omega}{2}$, будемъ имѣть

$$csK\overset{\alpha_1}{\omega} = csK\frac{2k\pi+\theta+\omega_1}{N} = csK\frac{2k\pi+\theta}{N} - \frac{K}{N}\omega_1 sin\frac{2k\pi+\theta}{N} -$$

$$-\frac{K^2}{N^2}\frac{\omega_1^2}{1.2}cs\frac{2k\pi+\theta}{N} = csK\overset{\theta}{\omega} - \frac{K}{N}\omega_1 sinK\overset{\theta}{\omega} - \frac{K^2}{N^2}\frac{\omega_1^2}{1.2}csK\overset{\theta}{\omega}$$

$$lgsin\frac{\overset{\alpha_1}{\omega}}{2} = lgsin\ K\frac{2k\pi+\theta+\omega_1}{2N} = lgsin\frac{\theta+2k\pi}{2N} + \frac{1}{2N}\omega_1 ctg\frac{\theta+2k\pi}{2N} -$$

$$-\frac{1}{4N^2}\frac{\omega_1^2}{1.2}\frac{1}{sin^2\frac{2k\pi+\theta}{N}} = lgsin\frac{\overset{\theta}{\omega}}{2} + \frac{\omega_1}{2N}ctg\frac{\overset{\theta}{\omega}}{2} - \frac{1}{4N^2}\frac{\omega_1^2}{1.2}\frac{1}{sin^2\frac{\overset{\theta}{\omega}}{2}};$$

а затѣмъ, подставивъ эти разложенія въ сумму Σ^{α_1}, получимъ

$$\Sigma^{\alpha_1} csK\omega lgsin\frac{\omega}{2} = \Sigma^{\theta}\left(csK\omega - \frac{K}{N}\omega_1 sinK\omega - \frac{K^2}{N^2}\frac{\omega_1^2}{1.2}csK\omega\right) \times$$

$$\times\left(lgsin\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2N}\omega_1 ctg\frac{\omega}{2} - \frac{1}{4N^2}\frac{\omega_1^2}{1.2}\frac{1}{sin^2\frac{\omega}{2}}\right)$$

или, ограничиваясь безконечно малыми втораго порядка,

$$\Sigma^{\alpha_1} csK\omega lgsin\frac{\omega}{2} = \Sigma^{\theta} csK\omega lgsin\frac{\omega}{2} - \omega_1\Sigma^{\theta}\left(\frac{K}{N}sinK\omega lgsin\frac{\omega}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2N}csK\omega ctg\frac{\omega}{2}\right) - \frac{\omega_1^2}{1,2}\Sigma^{\theta}\left(\frac{K^2}{N^2}csK\omega lgsin\frac{\omega}{2} + \frac{K}{N^2}sinK\omega ctg\frac{\omega}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4N^2}\frac{csK\omega}{sin^2\frac{\omega}{2}}\right)$$

Разложеніе суммы Σ^{α_2} будетъ отличаться отъ второй части этого равенства только тѣмъ, что вмѣсто ω_1 будетъ стоять ω_2. На основаніи разложеній этихъ двухъ суммъ

$$2\Sigma^{\theta} csK\omega lgsin\frac{\omega}{2} - \Sigma^{\alpha_1} csK\omega lgsin\frac{\omega}{2} - \Sigma^{\alpha_2} csK\omega lgsin\frac{\omega}{2} =$$

$$= (\omega_1+\omega_2)\Sigma^{\theta}\left(\frac{K}{N}sinK\omega lgsin\frac{\omega}{2} - \frac{1}{2N}csK\omega ctg\frac{\omega}{2}\right)$$

$$-\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{1.2}\Sigma^{\theta}\left(\frac{K^2}{N^2}csK\omega lgsin\frac{\omega}{2} + \frac{K}{N^2}sinK\omega lgsin\frac{\omega}{2} + \frac{1}{4N^2}\frac{csK\omega}{sin^2\frac{\omega}{2}}\right)$$

или, если замѣнимъ $\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{1.\ 2}$ черезъ $-tg\theta(\omega_1+\omega_2)$ по соотношенію (40),

$$2\Sigma^{\theta} csK\omega lgsin\frac{\omega}{2} - \Sigma^{\alpha_1} csK\omega lgsin\frac{\omega}{2} - \Sigma^{\alpha_2} csK\omega lgsin\frac{\omega}{2} =$$

$$-(\omega_1+\omega_2)\left\{tg\theta\Sigma^{\theta}(p^2csK\omega - pctg\theta sinK\omega)lgsin\frac{\omega}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4N^2}\Sigma^{\theta}\left(\frac{csK\omega}{sin^2\frac{\omega}{2}}tg\theta + 2K\frac{sinK\omega sin\omega}{sin^2\frac{\omega}{2}}tg\theta + N\frac{csK\omega sin\omega}{sin^2\frac{\omega}{2}}\right)\right.$$

Слѣд. l_1 приметъ видъ:

$$l_1 = \frac{P_1}{h\varrho v_0^2} - \left[b(\omega_1+\omega_2)\frac{sin^3\theta}{\pi cs\theta}\right]\frac{2p}{sin^2\theta}\Sigma^{\theta}(pcsK\omega - ctg\theta sinK\omega)$$

$$\times lgsin\frac{\omega}{2} - \frac{2b(\omega_1+\omega_2)}{\pi}\left\{\frac{tg\theta}{4N^2}\Sigma^{\theta}\frac{csK\omega}{sin^2\frac{\omega}{2}} + \frac{2Ktg\theta}{4N^2}\Sigma^{\theta}\frac{sinK\omega sin\omega}{sin^2\frac{\omega}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4N}\Sigma^{\theta}\frac{csK\omega sin\omega}{sin^2\frac{\omega}{2}}\right\} \quad (57)$$

Послѣднія три суммы могутъ быть найдены. Чтобы упростить первую изъ нихъ, возьмемъ тожество

$$csK\omega = 2cs(K-1)\omega cs\omega - cs(K-2)\omega$$

справедливое при всякомъ цѣломъ K и произвольномъ значеніи ω, поставимъ въ немъ $1-2\sin^2\frac{\omega}{2}$ вмѣсто $cs\omega$ и раздѣлимъ обѣ части на $\sin^2\frac{\omega}{2}$; получимъ:

$$\frac{csK\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}}=-4cs(K-1)\omega+2\frac{cs(K-1)\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}}-\frac{cs(K-2)\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}}$$

Замѣняя K послѣдовательно черезъ $K-1$, $K-2$,... 2, мы получимъ вмѣстѣ съ предъидущимъ всего $K-1$ тожество. Исключая изъ нихъ $K-2$ отношенія $\frac{cs(K-1)\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}}$, $\frac{cs(K-1)\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}}$,... $\frac{cs2\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}}$, найдемъ $\frac{csK\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}}=-4.1cs(K-1)\omega-4.2cs(K-2)\omega-$

$$4.3cs(K-3)\omega-\ldots-4(K-1)cs\omega+K\frac{cs\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}}-(K-1)\frac{1}{\sin^2\frac{\omega}{2}}.$$

или, замѣняя въ предпослѣднемъ членѣ $cs\omega$ черезъ $1-$ $-2\sin^2\frac{\omega}{2}$,

$$\frac{csK\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}}=-4.1cs(K-1)\omega-4.2cs(K-2)\omega-4.3cs(K-3)\omega-\ldots$$

$$-(4K-1)cs\omega-2K+\frac{1}{\sin^2\frac{\omega}{2}},$$

и потому

$$\Sigma^\theta\frac{csK\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}}=-4.1\Sigma^\theta cs(K-1)\omega-4.2\Sigma^\theta cs(K-2)\omega-4.3$$

$$\times\Sigma^\theta cs(K-3)\omega-\ldots-4(K-1)\Sigma^\theta cs\omega-2KN+\Sigma^\theta\frac{1}{\sin^2\frac{\omega}{2}}$$

Всѣ суммы второй части кромѣ $\Sigma^\theta\frac{1}{\sin^2\frac{\omega}{2}}$ имѣютъ видъ $\Sigma^\theta csa\omega$, гдѣ a цѣлое число. Разлагая эту послѣднюю на двѣ суммы

$$\Sigma^\theta csa\omega=\Sigma csa\frac{\theta+2k\pi}{N}=csa\frac{\theta}{N}\Sigma cs\frac{2a\pi}{N}k-sina\frac{\theta}{N}\Sigma\sin\frac{2a\pi}{N}k$$

и пользуясь формулами

$$\Sigma csk\varphi=cs\frac{N-1}{2}\varphi\frac{\sin\frac{N\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\quad\text{и}\quad\Sigma\sin k\varphi=\sin\frac{N-1}{2}\varphi\frac{\sin\frac{N\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\ ^{*)}$$

докажемъ, что $\Sigma^\theta csa\omega$ обращается въ нуль при $a\neq N$. Если же $a=N$, то $\Sigma csa\omega=\Sigma csN\omega=\Sigma cs(\theta+2k\pi)=Ncs\theta$. Такимъ образомъ, когда $p\leq1$, $N\geq k$, въ ряду суммъ второй части у насъ не будетъ $\Sigma^\theta csN\omega$, всѣ эти суммы за исключеніемъ $\Sigma^\theta\frac{1}{\sin^2\frac{\omega}{2}}$ обратятся въ нуль и мы будемъ имѣть

$$\Sigma^\theta\frac{csK\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}}=-2KN+\Sigma^\theta\frac{1}{\sin^2\frac{\omega}{2}}\qquad(58,a)$$

Если же $p>1$ и $K>N$, то между суммами второй части встрѣтится сумма $-4(K-N)\Sigma^\theta csN\omega=-4(K-N)Ncs\theta$ и тогда

$$\Sigma^\theta\frac{csK\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}}=-2NK-4(K-N)Ncs\theta+\Sigma^\theta\frac{1}{\sin^2\frac{\omega}{2}}\qquad(58,b)$$

---

*) Выводъ этихъ формулъ можно найти въ вышеупомянутой статьѣ Мещерскаго (формулы (22_1) и (22_2)).

Упростимъ подобнымъ же образомъ сумму аналогичную предъидущей—$\Sigma^{\theta}\frac{\sin K\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}}$, которая, хотя и не входитъ въ искомое выраженіе l_1, но будетъ намъ полезна при отысканіи другихъ двухъ суммъ этого выраженія. Написавъ тожество

$$\sin K\omega = 2\sin(K-1)\omega\,cs\omega - \sin(K-2)\omega$$

замѣнивъ въ немъ по прежнему $cs\omega$ черезъ $1-2\sin^2\frac{\omega}{2}$ и раздѣливъ обѣ части на $\sin^2\frac{\omega}{2}$, будемъ имѣть

$$\frac{\sin K\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}} = -4\sin(K-1)\omega + 2\frac{\sin(K-1)\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}} - \frac{\sin(K-2)\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}}$$

Если въ этомъ тожествѣ будемъ замѣнять K послѣдовательно черезъ $K-1$, $K-2, \ldots 2$, то получимъ вмѣстѣ съ предъидущимъ всего $K-1$ тожествъ, исключая изъ которыхъ отношенія $\frac{\sin(K-1)\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}}$, $\frac{\sin(K-2)\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}}$, $\frac{\sin 2\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}}$, найдемъ

$$\frac{\sin K\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}} = -4\sin(K-1)\omega - 4.2\sin(K-2)\omega - \ldots$$

$$-4(K-1)\sin\omega + K\frac{\sin\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}}$$

и слѣд.

$$\Sigma^{\theta}\frac{\sin K\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}} = -4.1\Sigma^{\theta}\sin(K-1)\omega - 4.2\Sigma^{\theta}\sin(K-2)\omega - \ldots$$

$$-4.(K-1)\Sigma^{\theta}\sin\omega + 2K\Sigma^{\theta}ctg\frac{\omega}{2}$$

Но, разлагая сумму вида $\Sigma\sin a\omega$, гдѣ a есть цѣлое число, на двѣ суммы:

$$\Sigma^{\theta}\sin a\omega = \Sigma\sin a\frac{\theta+2k\pi}{N} = \sin a\frac{\theta}{N}\Sigma cs\frac{2a\pi}{N}k + cs\,a\frac{\theta}{N}\Sigma\sin\frac{2a\pi}{N}k$$

докажемъ, какъ и раньше, что эта сумма при $a \neq N$ равна нулю, а при $a=N$ равна $N\sin\theta$, а потому подобно предъидущему получимъ

$$\Sigma^{\theta}\frac{\sin K\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}} = \begin{cases} 2K\Sigma^{\theta}ctg\frac{\omega}{2} & \text{при } p\leq 1 \\ 2K\Sigma^{\theta}ctg\frac{\omega}{2} - 4N(K-N)\sin\theta & \text{при } p>1 \end{cases} \qquad (59)$$

Имѣя формулы (58,a), (58,b) и (59) уже не трудно найти $\Sigma^{\theta}\frac{\sin K\omega\sin\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}}$ и упростить $\Sigma^{\theta}\frac{cs K\omega\sin\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}}$.

Въ самомъ дѣлѣ, мы можемъ писать

$$\Sigma^{\theta}\frac{cs K\omega\sin\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}} = \frac{1}{2}\Sigma^{\theta}\frac{\sin(K+1)\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}} - \frac{1}{2}\Sigma^{\theta}\frac{\sin(K-1)\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}}$$

$$\Sigma^{\theta}\frac{\sin K\omega\sin\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}} = \frac{1}{2}\Sigma^{\theta}\frac{cs(K-1)\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}} - \frac{1}{2}\Sigma^{\theta}\frac{cs(K+1)\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}}$$

и слѣд., по формуламъ (58,a), (58 b), (59),

$$\Sigma^{\theta}\frac{cs K\omega\sin\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}} = (K+1)\Sigma^{\theta}ctg\frac{\omega}{2} - (K-1)\Sigma^{\theta}ctg\frac{\omega}{2} +$$

$$+\left|\begin{matrix} O \\ -2N(K+1-N)\sin\theta + 2N(K-1-N)\sin\theta \end{matrix}\right| \begin{matrix} \text{при } p<1 \\ \text{при } p>1 \end{matrix}$$

$$\Sigma^{\theta}\frac{\sin K\omega\sin\omega}{\sin^2\frac{\omega}{2}} = -N(K-1) + N(K+1) +$$

$$+\left|\begin{matrix} O \\ -2N(K-1-N)cs\theta + 2N(K+1-N)cs\theta \end{matrix}\right| \begin{matrix} \text{при } p<1 \\ \text{при } p>1 \end{matrix}$$

или
$$\Sigma^{\theta}\frac{csK\omega sin\omega}{sin^2\frac{\omega}{2}}=2\Sigma^{\theta}ctg\frac{\omega}{2}+\left|\begin{matrix}O\\-4Nsin\theta\end{matrix}\right|\begin{matrix}\text{при } p<1\\ \text{при } p>1\end{matrix}\qquad(60)$$

$$\Sigma^{\theta}\frac{sinK\omega sin\omega}{sin^2\frac{\omega}{2}}=2N+\left|\begin{matrix}O\\+4Ncs\theta\end{matrix}\right|\begin{matrix}\text{при } p<1\\ \text{при } p>1\end{matrix}\qquad(61)$$

Такимъ образомъ мы нашли $\Sigma^{\theta}\frac{sinK\omega sin\omega}{sin^2\frac{\omega}{2}}$ и привели $\Sigma^{\theta}\frac{csK\omega}{sin^2\frac{\omega}{2}}$ и $\Sigma^{\theta}\frac{csK\omega sin\omega}{sin^2\frac{\omega}{2}}$ соотвѣтственно къ $\Sigma^{\theta}\frac{1}{sin^2\frac{\omega}{2}}$ и $\Sigma^{\theta}ctg\frac{\omega}{2}$.

Чтобы найти эти послѣднія воспользуемся формулой, данной Euler'омъ *).

$$sin\frac{\theta}{2N}\cdot sin\frac{\theta+2\pi}{2N}\cdot sin\frac{\theta+4\pi}{2N}\cdot\ldots sin\frac{\theta+2(N-1)\pi}{2N}=\pm\frac{sin\frac{\theta}{2}}{2^{N-1}},$$

во второй части которой мы должны брать верхній знакъ, ибо у насъ $\theta<2\pi$ и всѣ синусы первой части положительны; а именно возьмемъ логариѳмъ обѣихъ частей этого равенства и продифференцируемъ обѣ части два раза; тогда послѣ перваго дифференцированія получаемъ

$$\frac{1}{N}\Sigma^{\theta}ctg\frac{\omega}{2}=\frac{1}{N}\left(ctg\frac{\theta}{2N}+ctg\frac{\theta+2\pi}{2\pi}+\ldots+ctg\frac{\theta+2(N-1)\pi}{2N}\right)=ctg\frac{\theta}{2}$$

а послѣ втораго

$$\frac{1}{N^2}\Sigma^{\theta}\frac{1}{sin^2\frac{\omega}{2}}=\frac{1}{N^2}\left(\frac{1}{sin^2\frac{\theta}{2N}}+\frac{1}{sin^2\frac{\theta+2\pi}{2N}}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{1}{sin^2\frac{\theta+2(N-1)\pi}{2N}}\right)=\frac{1}{sin^2\frac{\theta}{2}}$$

*) Euler. Intoductio in analysin infinitorum. Часть I.

При помощи этихъ формулъ окончательно найдемъ для $\Sigma^{\theta}\frac{csK\omega}{sin^2\frac{\omega}{2}}$ и $\Sigma^{\theta}\frac{csK\omega sin\omega}{sin^2\frac{\omega}{2}}$ слѣд. значенія:

$$\Sigma^{\theta}\frac{csK\omega}{sin^2\frac{\omega}{2}}=-2NK+\frac{N^2}{sin^2\frac{\theta}{2}}+\left|\begin{matrix}O\\-4N(K-N)cs\theta\end{matrix}\right|\begin{matrix}\text{при } p<1\\ \text{при } p>1\end{matrix}\qquad(62)$$

$$\Sigma^{\theta}\frac{csK\omega sin\omega}{sin^2\frac{\omega}{2}}=2Nctg\frac{\theta}{2}+\left|\begin{matrix}O\\-4Nsin\theta\end{matrix}\right|\begin{matrix}\text{при } p<1\\ \text{при } p>1\end{matrix}\qquad(63)$$

Наконецъ, подставляя суммы (61), (62) и (63) въ третій членъ выраженія l_1 (ур. 57), получимъ

$$\frac{tg\theta}{4N^2}\Sigma^{\theta}\frac{csK\omega}{sin^2\frac{\omega}{2}}+\frac{Ktg\theta}{2N^2}\Sigma^{\theta}\frac{sinK\omega sin\omega}{sin^2\frac{\omega}{2}}+\frac{1}{4N}\Sigma^{\theta}\frac{csK\omega sin\omega}{sin^2\frac{\omega}{2}}=-\frac{p}{2}tg\theta+$$
$$+\frac{tg\theta}{4sin^2\frac{\theta}{2}}+ptg\theta+\frac{ctg\frac{\theta}{2}}{2}+\left|\begin{matrix}O\\-(p-1)sin\theta+2psin\theta-sin\theta\end{matrix}\right|\begin{matrix}p<1\\ p>1\end{matrix}$$
$$=\frac{sin^3\theta}{cs\theta}\left\{\frac{p}{2sin^2\theta}+\frac{1}{4sin^2\theta sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{cs\theta}{sin^3\theta}\frac{ctg\frac{\theta}{2}}{2}+\left|\begin{matrix}O\\p\frac{cs\theta}{sin^3\theta}\end{matrix}\right|\begin{matrix}p<1\\ p>1\end{matrix}\right\}$$

или, соединяя 1-ый членъ съ 4-мъ, и 2-й съ 3-мъ,

$$\frac{tg\theta}{4N^2}\Sigma^{\theta}\frac{csK\omega}{sin^2\frac{\omega}{2}}+\frac{Ktg\theta}{2N^2}\Sigma^{\theta}\frac{sinK\omega sin\omega}{sin^2\frac{\omega}{2}}+\frac{1}{4N}\Sigma^{\theta}\frac{csK\omega sin\omega}{sin^2\frac{\omega}{2}}=$$
$$=\frac{sin^3\theta}{2cs\theta}\left\{\frac{1}{4sin^4\frac{\theta}{2}}+\frac{p}{sin^2\theta}\left[\begin{matrix}1 & \text{при } p<1\\ 1+2cs\theta & \text{при } p>1\end{matrix}\right]\right\}$$

и на основаніи этого равенства

$$l_1=\frac{P_1}{h\omega_0^2}-\left[b(\omega_1+\omega_2)\frac{sin^3\theta}{cs\theta}\right]\left\{\frac{2p}{sin^2\theta}\Sigma^{\theta}(pcsK\omega-ctg\theta sinK\omega)lgsin\frac{\omega}{2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4sin^4\frac{\theta}{2}}+\frac{p}{sin^2\theta}\left[\begin{matrix}1 & \text{при } p<1\\ 1+2cs\theta & \text{при } p>1\end{matrix}\right]\right\}$$

Исключая теперь изъ послѣдняго ур. и ур. (56) множитель $b(\omega_1+\omega_2)\frac{\sin^3\theta}{cs\theta}$, (для чего дѣлимъ 1-ое ур. на 2-ое), мы получимъ только одно ур.

$$\frac{l_1}{P_1}=\frac{\frac{1}{4\sin^4\frac{\theta}{2}}+\frac{p}{\sin^2\theta}\left[\begin{matrix}1 \text{ при } p<1\\ 1+2cs\theta p>1\end{matrix}\right]+\frac{2p}{\sin^2\theta}\Sigma^{\theta}(pcsK\omega-ctg\theta\sin K\omega)lg\sin\frac{\omega}{2}}{h\varrho v_0^2\frac{\pi p^2csp(\pi-\theta)}{\sin^2\theta\sin p\pi}\left\{1+\frac{1}{p}ctg\theta tgp(\pi-\theta)\right\}}+\frac{1}{h\varrho v_0^2}$$

между тремя величинами l_1, P_1 и θ. Считая поэтому θ даннымъ, мы можемъ выбрать l_1 произвольно и тогда P_1 опредѣлится по предъидущему ур. Такъ, если положимъ

$$l_1=\frac{1}{4\sin^4\frac{\theta}{2}}+\frac{p}{\sin^2\theta}\left[\begin{matrix}1 \text{ при } p<1\\ 1+2cs\theta \text{ при } p>1\end{matrix}\right]+$$

$$+\frac{2p}{\sin^2\theta}\Sigma^{\theta}(pcsK\omega-ctg\theta\sin K\omega)lg\sin\frac{\omega}{2}+$$

$$+\frac{\pi p^2csp(\pi-\theta)}{\sin^2\theta\sin p\pi}\left\{1+\frac{1}{p}ctg\theta tgp(\pi-\theta)\right\},$$

то значеніе P_1 будетъ

$$P_1=h\varrho v_0^2\frac{\pi p^2csp(\pi-\theta)}{\sin^2\theta\sin p\pi}\left\{1+\frac{1}{p}ctg\theta tgp(\pi-\theta)\right\}$$

Эти формулы при $v_0=h=\varrho=1$ представляютъ формулы, данныя Мещерскимъ (только здѣсь вмѣсто α стоитъ p).